Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXI, № 2

МАТЕМАТИКА

Е. Б. ДЫНКИН

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА СИСТЕМЫ ВЕСОВ ЛИНЕЙНОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ПОЛУПРОСТОЙ ГРУППЫ ЛИ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 12 I 1950)

Введенное в ([1,2]) понятие системы простых корней полупростой группы Ли используется для изучения строения системы весов линейного представления такой группы. Теоремы 1—2 обращают внимание на возможности, вытекающие из неоднозначного способа упорядочения системы весов. В частности, теорема 1 полезна при некоторых доказательствах приводимости. Теорема 3 устанавливает связь между системами весов, отвечающими представлениям группы и подгруппы. Частный случай этой теоремы, когда представление группы $\mathfrak{G}$ является присоединенным, а подгруппа $\tilde{\mathfrak{G}}$ трехчленной, содержится в работе А. И. Мальцева ([3]). Теорема 4 вводит новые, легко вычисляемые характеристики для системы весов. Используя эти характеристики, теорема 5 дает общий критерий ортогональности и симплектичности представления. Перечисление ортогональных и симплектических представлений, полученное впервые А. И. Мальцевым ([3]) посредством специального разбора каждого из типов простых групп, сразу вытекает из сравнения теоремы 5 и табл. 1. Дальнейшие применения теорем 1—5 будут даны нами в последующих публикациях.

Пусть $\mathfrak{G}$ — полупростая группа Ли и G — соответствующая ей алгебра Ли. Система Σ корней группы $\mathfrak{G}$ может рассматриваться как множество элементов из алгебры G (см., например, ([1]), n° 24). Веса любого линейного представления группы $\mathfrak{G}$ выражаются через корни линейно с рациональными коэффициентами и, следовательно, принадлежат пространству H над полем действительных чисел, натянутому на Σ. Картановская билинейная форма определяет в H евклидову метрику. Следуя А. И. Мальцеву, будем называть евклидово пространство H идемпотентом группы $\mathfrak{G}$. Между элементами H вводится отношение $x > y$, удовлетворяющее условиям: а) если $\boldsymbol{x} > \boldsymbol{y}$, то для любого z $x+z > y+z$; б) если $x > 0$, $y > 0$ и λ, μ — положительные числа, то $\lambda x + \mu y > 0$; в) если $x \neq 0$, то либо $x > 0$ либо $-x > 0$. Всякое упорядочение со свойствами а) — в) совпадает с лексикографическим упорядочением относительно некоторого базиса. Введение отношения $x > y$ позволяет определить понятие «простой корень» ([1,2]). Система Π простых корней группы $\mathfrak{G}$ является базисом пространства H. Изменение упорядочения H влечет за собой, вообще говоря, изменение системы простых корней. Фиксируем одну из возможных систем простых корней Π и назовем Π-упорядочениями все упорядочения, приводящие к этой системе. Пусть x и y — векторы из H. Будем писать $x \gg y$, если при любом Π-упорядочении $x > y$.

Лемма. *Если Λ — старший вес неприводимого представления, то любой вес M имеет вид $M = \Lambda - \alpha_1 - \alpha_2 - \ldots - \alpha_k$ ($\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k \in \Pi$).*

Доказательство. Пусть R — пространство, в котором действует данное представление, и пусть $e_\Lambda \in R$ — вектор старшего веса. Подпространство, натянутое на векторы $E_{-\alpha_1} E_{-\alpha_2} \ldots E_{-\alpha_k} e_\Lambda$ ($\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \Pi$) приводит представление и, значит, совпадает с R. Вместе с тем вектор $E_{-\alpha_1} E_{-\alpha_2} \ldots E_{-\alpha_k} e_\Lambda$ имеет вес $\Lambda - \alpha_1 - \alpha_2 - \ldots - \alpha_k$.

Теорема 1. *Если представление неприводимо, то вес Λ, старший относительно некоторого Π-упорядочения, является старшим относительно любого Π-упорядочения.*

Доказательство вытекает непосредственно из леммы.

Теорема 2. *Пусть M_1 и M_2 — веса некоторого неприводимого представления. Для того чтобы $M_2 \gg M_1$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$M_2 = M_1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k, \text{ где } \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \Pi. \tag{1}$$

Достаточность условия (1) очевидна. Докажем его необходимость. Пусть Λ — старший вес. В силу леммы, $M_1 = \Lambda - \alpha_1 - \alpha_2 - \ldots - \alpha_k$, $M_2 = \Lambda - \beta_1 - \beta_2 - \ldots - \beta_q$ и, следовательно, $M_2 = M_1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k - \beta_1 - \beta_2 - \ldots - \beta_q$. Произведя сокращения, можно считать, что ни при каких i и j $\alpha_i \neq \beta_j$. Введем в H лексикографическое упорядочение, принимая за базис систему Π. Такое упорядочение является Π-упорядочением независимо от порядка нумерации простых корней. Выберем способ нумерации так, чтобы все корни α_i получили номера бо́льшие, чем любой из корней β_j. Если $q > 0$, то $M_2 < M_1$, что противоречит требованию $M_2 \gg M_1$.

Теорема 3. *Пусть G — полупростая алгебра Ли и $\widetilde{G}$ — ее полупростая подалгебра. Пусть их идемпотенты подчинены условию $\widetilde{H} \subset H$. Пусть φ — линейное представление алгебры G и $\widetilde{\varphi}$ — линейное представление подалгебры $\widetilde{G}$, определяемое формулой $\widetilde{\varphi}(g) = \varphi(g)$ для $g \in \widetilde{G}$. Тогда система $\widetilde{\Delta}$ весов представления $\widetilde{\varphi}$ получается из системы Δ весов представления φ посредством ортогонального проектирования на $\widetilde{H}$.*

Доказательство. Пусть R — пространство, в котором действуют φ и $\widetilde{\varphi}$. В R существует базис, составленный из весовых векторов представления φ. Вектор x, весовой относительно φ, является весовым и относительно $\widetilde{\varphi}$. Пусть Λ — вес x относительно φ и $\widetilde{\Lambda}$ — вес x относительно $\widetilde{\varphi}$. Это означает, что $\varphi(h)x = (\Lambda, h)x$ для всех $h \in H$ и $\widetilde{\varphi}(h)x = (\widetilde{\Lambda}, h)x$ для всех $h \in \widetilde{H}$. Отсюда для всех $h \in \widetilde{H}$ $(\Lambda, h) = (\widetilde{\Lambda}, h)$, и $\Lambda - \widetilde{\Lambda}$ ортогонально к $\widetilde{H}$.

Согласно теории Картана, неприводимое представление полупростой группы Ли $\mathfrak{G}$ определяется своим старшим весом (см., например, [4]). Произвольный вектор Λ из H определяется заданием чисел $\Lambda_\alpha = \frac{2(\Lambda, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}$ для всех $\alpha \in \Pi$. Для того чтобы Λ являлся старшим весом одного из представлений группы $\mathfrak{G}$, необходимо и достаточно, чтобы числа Λ_α были целыми неотрицательными. В силу сказанного, удобно задавать неприводимое представление, изображая схему простых корней $\mathfrak{G}$ (см. [1,2]) и надписывая около каждого корня α соответствующее значение Λ_α.

Пусть Λ — старший вес неприводимого представления φ. Назовем вес M **весом k-го этажа**, если $M = \Lambda - \alpha_1 - \alpha_2 - \ldots - \alpha_k$ ($\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \Pi$). Из леммы и линейной независимости простых корней вытекает, что число k определено и притом однозначно для каждого веса M.

Замечание. Из доказательства леммы легко усмотреть, что вес k-го этажа имеет кратность не более k!

Теорема 4. *Система весов произвольного неприводимого представления веретенообразна: если общее число этажей равно $r+1$ и s_k — число весов, принадлежащих k-му этажу (считая каждый вес столько раз, какова его кратность), то*

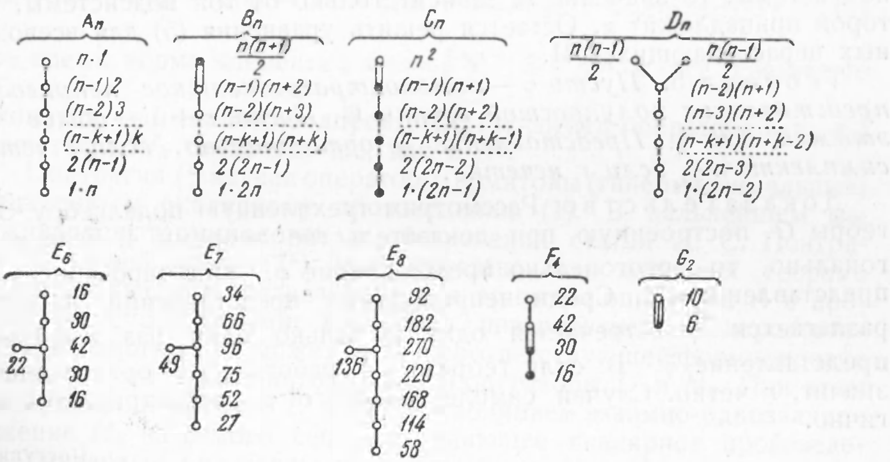
$$s_k = s_{r-k} \quad \text{и} \quad s_1 \leqslant s_2 \leqslant \ldots \leqslant s_{\bar r}, \quad \text{где } \bar r = \left[\frac{r}{2}\right] + 1. \tag{2}$$

Величина r может вычисляться по формуле

$$r = \sum_{\alpha \in \Pi} r_\alpha \Lambda_\alpha. \tag{3}$$

Для простых групп значения коэффициентов r_α указаны в табл. 1, в которой даны схемы простых корней таких групп и около каждого корня α проставлено соответствующее значение r_α. Для любых полупростых групп схемы простых корней распадаются на связные компоненты перечисленных в табл. 1 типов. Значение r_α зависит только от компоненты, к которой принадлежит α, и может быть взято из таблицы.

Таблица 1*



---

* В группах B_n, C_n, F_4 и G_2 существуют корни двух разных длин. Корни большей длины изображаются белыми кружками, а корни меньшей длины — черными.

Доказательство. Пусть G — произвольная полупростая алгебра и Π — система ее простых корней. Для каждого $\alpha \in \Pi$ выберем векторы e_α и $e_{-\alpha}$ так, чтобы $(e_\alpha, e_{-\alpha}) = 1$. Положим $f = \sum_{\alpha \in \Pi} p_\alpha \alpha$, $e_f = \sum_{\alpha \in \Pi} u_\alpha e_\alpha$, $e_{-f} = \sum_{\alpha \in \Pi} u_{-\alpha} e_{-\alpha}$. Выберем p_α так, чтобы для всех $\alpha \in \Pi$

$$(f, \alpha) = (f, f), \tag{4}$$

и пусть $u_\alpha u_{-\alpha} = p_\alpha$. Тогда $f \circ e_f = (f, f) e_f$, $f \circ e_{-f} = -(f, f) e_{-f}$, $e_f \circ e_{-f} = (e_f, e_{-f}) f$. Следовательно, элементы вида $af + be_f + ce_{-f}$ образуют в алгебре G трехчленную подалгебру $\widetilde{G}$. Линейное неприводимое представление φ алгебры G индуцирует представление $\widetilde{\varphi}$ подалгебры $\widetilde{G}$. При ортогональном проектировании на прямую af система весов представления φ переходит в систему весов представления $\widetilde{\varphi}$. В то же время, в силу (4), все простые корни G проектируются в f. Пусть Λ — старший вес представления φ и $\widetilde{\Lambda}$ — его проекция. Веса представления φ, принадлежащие k-му этажу, проектируются в $\widetilde{\Lambda} - kf$. Таким образом, кратность веса $\widetilde{\Lambda} - kf$ в представлении $\widetilde{\varphi}$ равна s_k. Но система весов всякого представления трехчленной алгебры $\widetilde{G}$ распадается на арифметические прогрессии с разностью f и в каждой из этих прогрессий крайние члены симметричны относительно нуля. Отсюда вытекают отношения (2). Заметим далее, что число $r+1$ этажей представления φ равно $\frac{2(\widetilde{\Lambda}, f)}{(f, f)} + 1 = \frac{2(\Lambda, f)}{(f, f)} + 1$, откуда $r = \frac{2(\Lambda, f)}{(f, f)}$.

Определим коэффициенты r_α условием $\frac{f}{(f, f)} = \sum_{\alpha \in \Pi} r_\alpha \frac{\alpha}{(\alpha, \alpha)}$. Умножая это равенство скалярно на 2Λ, имеем (3). С другой стороны, скалярно умножая его на $\beta \in \Pi$ и принимая во внимание (4), имеем для вычисления r_α следующую систему линейных уравнений:

$$1 = \sum_{\alpha \in \Pi} r_\alpha \frac{(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \quad (\beta \in \Pi). \tag{5}$$

Из этой системы видно, что если Π распадается на ортогональные подсистемы, то значение r_α зависит только от той подсистемы, к которой принадлежит α. Остается решить уравнения (5) для всевозможных нераспадающихся Π.

Теорема 5. *Пусть φ — самоконтрагредиентное неприводимое представление полупростой группы $\mathfrak{G}$. Пусть $r+1$ — общее число этажей для φ. Представление φ ортогонально, если r четно, и симплектично, если r нечетно.*

Доказательство. Рассмотрим трехчленную подалгебру $\widetilde{G}$ алгебры G, построенную при доказательстве теоремы 4. Если φ ортогонально, то ортогонально представление $\widetilde{\varphi}$, индуцированное на $\widetilde{G}$ представлением φ. Среди неприводимых представлений, на которые разлагается $\widetilde{\varphi}$, встречается один и только один раз $r+1$-мерное представление $\widetilde{\widetilde{\varphi}}$. В силу теоремы 4 работы ([3]) $\widetilde{\widetilde{\varphi}}$ ортогонально и, значит, r четно. Случай симплектического φ рассматривается аналогично.

Поступило
5 I 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Е. Б. Дынкин, Матем. сборн., 18 (60), 347 (1946). [2] Е. Б. Дынкин, Усп. матем. наук, 4: 2 (20), 59 (1947). [3] А. И. Мальцев, Изв. АН СССР, сер. матем., 8, 143 (1944). [4] H. Weil, Math. Zs., 1, 23, 271; 2, 24, 328 (1925) (пер. в Усп. матем. наук, 4, 201 (1938)).