Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXX, № 5

ГИДРАВЛИКА

Н. Н. ВЕРИГИН

О ТЕЧЕНИЯХ ГРУНТОВЫХ ВОД ПРИ МЕСТНОЙ УСИЛЕННОЙ ИНФИЛЬТРАЦИИ

(Представлено академиком А. И. Некрасовым 2 XII 1949)

В [1] было показано, что основное уравнение движения свободных грунтовых вод при горизонтальном водоупоре может быть линеаризировано и приведено к уравнению термодинамики

$$a^2\Delta u + b = \partial u / \partial t, \tag{1}$$

$$u = h^2 / 2, \quad a = \sqrt{kh_{cp} / m}, \quad b = \varepsilon h_{cp} / m. \tag{2}$$

Здесь h — глубина (напор) грунтовой воды, t — время, k — коэффициент фильтрации грунта, m — пористость грунта, ε — модуль подземного стока, h_{cp} — некоторая средняя глубина потока грунтовых вод.

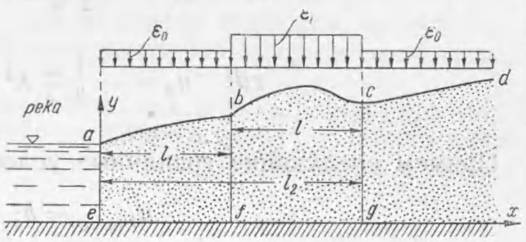

Рис. 1

Рассмотрим частное решение уравнения (1), отвечающее случаю, когда грунтовый поток (рис. 1), ограниченный некоторой областью стока (например, рекой), имеет на участках ab и cd модуль ε_0 и на участке bc — модуль $\varepsilon_1 > \varepsilon_0$. Иначе говоря, будем считать, что грунтовый поток на участке bc получает дополнительное питание за счет инфильтрации сверху интенсивностью $\varepsilon_1 - \varepsilon_0$. Этот случай представляет интерес для оценки подпора грунтовых вод под влиянием искусственного орошения земель и других мелиоративных мероприятий, вызывающих местную усиленную инфильтрацию на части потока длиною $l = l_2 - l_1$ (рис. 1).

Ниже рассматриваются возникающие при таких условиях установившееся и неустановившееся течения грунтовых вод.

1. Установившееся течение

А. Начальное установившееся течение (время $t = 0$). В естественных условиях на протяжении всего потока имеет место инфильтрация интенсивностью $\varepsilon = \varepsilon_0$.

Вводя в (1) вместо ε величину ε_0, приравнивая нулю правую часть уравнения и интегрируя, получим:

$$u = -\frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0}{k}x^2 + Bx + C. \tag{3}$$

Подставляя в (3) граничные условия для области стока ae

$$u = h_1^2 / 2 = \text{const}, \tag{4}$$

$$q\,|_{x=0} = kh\,dh\,/\,dx\,|_{x=0} = k\,du\,/\,dx\,|_{x=0} = q_0 = \text{const}, \tag{5}$$

найдем постоянные B и C. Вводя их значения в (3), окончательно получим:

$$u = \frac{h_1^2}{2} + \frac{q_0}{k}x - \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0}{k}x^2, \tag{6}$$

где q_0 — расход грунтовых вод, поступающий в область стока. Зная уровень грунтовых вод в естественных условиях в какой-либо точке $x = x_1$, по (6) можно определить величину q_0, которую поэтому следует считать известной.

Б. Конечное установившееся течение (время $t = \infty$). Для предельных условий $t = \infty$ в уравнении (1) величина ε будет равна: на участке bc $\varepsilon = \varepsilon_1$, а на участках ab и cd $\varepsilon = \varepsilon_0$. Вводя в 1) эти значения ε, принимая $\partial h / \partial t = 0$ и интегрируя (1), получим:

$$ab: \quad u_1 = -\frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0}{k}x^2 + B_1 x + C_1, \tag{7}$$

$$bc: \quad u_2 = -\frac{1}{2}\frac{\varepsilon_1}{k}x^2 + B_2 x + C_2, \tag{8}$$

$$cd: \quad u_3 = -\frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0}{k}x^2 + B_3 x + C_3. \tag{9}$$

Примем следующие граничные условия в области стока ae:

$$u_1\,|_{x=0} = h_1^2 / 2, \tag{10}$$

$$q\,|_{x=0} = k\,du_1\,/\,dx\,|_{x=0} = q_0 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_0)\,l, \tag{11}$$

а также на границах участков с различной инфильтрацией bf и cg

$$u_1\,|_{x=l_1} = u_2\,|_{x=l_1}, \quad q_1\,|_{x=l_1} = q_2\,|_{x=l_1}, \quad u_2\,|_{x=l_2} = u_3\,|_{x=l_2}, \quad q_2\,|_{x=l_2} = q_3\,|_{x=l_2}. \tag{12}$$

Условие (11) означает, что поступление воды из области питания после возникновения усиленной инфильтрации остается неизменным, и потому расход грунтовой воды, притекающей к области стока, меняется только за счет дополнительной инфильтрации $\varepsilon_1 - \varepsilon_0$ на участке длиной l.

Подставляя условия (10) — (12) в уравнения (7) — (9), найдем постоянные B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, C_3.

Вводя их значения в (4), окончательно будем иметь:

$$ab: \quad u_1 = \frac{h_1^2}{2} - \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0}{k}x^2 + \left(\frac{q_0}{k} + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_0}{k}l\right)x, \tag{13}$$

$$bc: \quad u_2 = \frac{h_1^2}{2} - \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_1}{k}x^2 + \left(\frac{q_0}{k} + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_0}{k}l_2\right)x - \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_0}{k}l_1^2, \tag{14}$$

$$cd: \quad u_3 = \frac{h_1^2}{2} - \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0}{k}x^2 + \frac{q_0}{k}x + \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_0}{k}(l_2^2 - l_1^2). \tag{15}$$

2. Неустановившееся течение

При исследовании неустановившегося течения будем считать, что дополнительная инфильтрация на участке bc мгновенно возникает в момент времени $t=0$ и в дальнейшем поддерживается постоянной.

При таком ограничении задача ставится следующим образом: требуется найти функцию $u(x, t)$, удовлетворяющую в интервале $l_1<x<l_2$ уравнению (1) при $\varepsilon=\varepsilon_1$, и начальному условию (6), а в интервалах $x<l_1$ и $x>l_2$ — удовлетворяющую уравнению (1) при $\varepsilon=\varepsilon_0$, начальному условию (6) и при $x=0$ граничному условию (4).

Для $t=\infty$ исследуемое течение должно определяться уравнениями (13) — (15).

Близкий к этой задаче случай рассматривался в термодинамике с целью изучения нагревания металла при электросварке ([2]), а также в теории фильтрации ([3]). В нашей задаче начальные условия задаются уравнением (6), в то время как в ([2]) начальная температура всюду считается равной нулю. Кроме того, в данной задаче вводится область стока (разгрузки), вследствие чего неустановившееся течение стремится здесь к состоянию динамического равновесия, определяемому уравнениями (13) — (15). В решении ([2]) неустановившееся движение тепла также асимптотически приближается к некоторому стационарному тепловому полю, но это имеет место за счет внешнего охлаждения. В задаче ([3]) неустановившийся режим фильтрации стремится к предельному течению вследствие просачивания воды через слабо проницаемый водоупор. Если в ([2, 3]) влиянием этих факторов пренебречь, то температура (или напор) будет неограниченно возрастать со временем, стремясь к бесконечности.

Для решения рассматриваемой задачи, как и в ([2]), удобно воспользоваться функцией так называемого „теплового удара", удовлетворяющей уравнению (1). При отсутствии внешнего охлаждения эта функция имеет вид:

$$f(x, t)=\frac{e^{-x^2/4a^2t}}{2a\sqrt{\pi t}}. \tag{16}$$

Выполняя предельное суммирование отдельных „тепловых ударов" и применяя, кроме того, принцип суперпозиции, получим решение данной задачи в следующем виде:

$$u=A_0\int\limits_0^t\int\limits_{-l/2}^{l/2}\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\theta)}}\left[e^{-\frac{(x-l_0-\xi)^2}{4a^2(t-\theta)}}-e^{-\frac{(x+l_0-\xi)^2}{4a^2(t-\theta)}}\right]d\theta\,d\xi+B_0x^2+C_0x+D_0=$$

$$=\frac{A_0}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t\left[\int\limits_{\alpha_2}^{\alpha_1}e^{-\alpha^2}\,d\alpha-\int\limits_{\beta_2}^{\beta_1}e^{-\beta^2}\,d\beta\right]d\theta+B_0x^2+C_0x+D_{\theta}, \tag{17}$$

где

$$l_0=l_1+\frac{l}{2}=l_2-\frac{l}{2}, \quad \alpha=\frac{x-l_0-\xi}{T}, \quad \beta=\frac{x+l_0-\xi}{T}, \tag{18}$$

$$\alpha_1=\frac{x-l_1}{T}, \quad \alpha_2=\frac{x-l_2}{T}, \quad \beta_1=\frac{x+l_2}{T}, \quad \beta_2=\frac{x+l_1}{T}, \tag{19}$$

причем

$$T=2a\sqrt{t-\theta}. \tag{20}$$

Выполняя в (17) квадратуры и определяя постоянные A_0, B_0, C_0, D_0 по уравнению (1) при $\varepsilon=\varepsilon_1$, а также по граничному (4) и начальному (6) условиям, получим:

$$ab:\quad u=\frac{h_1^2}{2}-\frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0}{k}x^2+\left(\frac{q_0}{k}+\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_0}{k}l\right)x+\frac{1}{4}\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_0}{k}x^2S, \tag{21}$$

$$bc:\quad u=\frac{h_1^2}{2}-\frac{1}{2}\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_0}{k}l_1^2-\frac{1}{2}\frac{\varepsilon_1}{k}x^2+\left(\frac{q_0}{k}+\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_0}{k}l_2\right)x+$$
$$+\frac{1}{4}\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_0}{k}x^2S, \tag{22}$$

$$cd:\quad u=\frac{h_1^2}{2}+\frac{1}{2}\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_0}{k}(l_2^2-l_1^2)-\frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0}{k}x^2+\frac{q_0}{k}x+\frac{1}{4}\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_0}{k}x^2S, \tag{23}$$

где:

$$S=\left(1-\frac{l_1}{x}\right)^2F(\lambda_1)-\left(1-\frac{l_2}{x}\right)^2F(\lambda_2)-\left(1+\frac{l_2}{x}\right)^2F(\lambda_3)+$$
$$+\left(1+\frac{l_1}{x}\right)^2F(\lambda_4), \tag{24}$$

причем

$$F=\left(1+\frac{1}{2\lambda^2}\right)\Phi(\lambda)+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda^2}, \tag{25}$$

$$\lambda_1=\frac{x-l_1}{2a\sqrt{t}},\quad \lambda_2=\frac{x-l_2}{2a\sqrt{t}},\quad \lambda_3=\frac{x+l_2}{2a\sqrt{t}},\quad \lambda_4=\frac{x+l_1}{2a\sqrt{t}}, \tag{26}$$

$$\Phi(\lambda)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\lambda e^{-\lambda^2}d\lambda. \tag{27}$$

Имея в виду, что $\Phi(-\lambda)=-\Phi(\lambda)$, $\Phi(0)=0$ и $\Phi(\infty)=1$, из (25) имеем:

$$F(-\lambda)=-F(\lambda),\quad F(\lambda)\big|_{t=\infty}=\infty,\quad F(\lambda_1)\big|_{t=0,\ x<l_1}=-1,$$
$$F(\lambda_1)\big|_{t=0,\ x>l_1}=1,\quad F(\lambda_2)\big|_{t=0,\ x<l_2}=-1,\quad F(\lambda_2)\big|_{t=0,\ x>l_2}=1,$$
$$F(\lambda_3)\big|_{t=0}=1,\quad F(\lambda_4)\big|_{t=0}=1. \tag{28}$$

Далее из (24) находим:

$$S\big|_{x=0}=0,\quad S\big|_{t=\infty}=0,\quad S\big|_{t=0,\,x<l_1}=-\frac{4(l_2-l_1)}{x},$$

$$S\big|_{t=0,\ l_1<x<l_2}=\frac{2(x^2-2xl_2+l_1^2)}{x^2},\quad S\big|_{t=0,\ x>l_2}=-\frac{2(l_2^2-l_1^2)}{x^2}. \tag{29}$$

Принимая во внимание эти особенности функций F и S, легко проверить, что уравнения (21) — (23) при $t=0$ обращаются в (6), а при $t=\infty$ — в (13) — (15). В случае $x=0$ уравнение (21) переходит в (4). Уравнения (21) — (23) удовлетворяют также условиям на границах участков с различной инфильтрацией типа (12). Решение (21) — (23) можно обобщить также на случай повышения уровня воды в реке от высоты h_1 до высоты h_2, происходящего одновременно с возникновением местной усиленной инфильтрации. Для этого в правой части уравнений (21) — (23) следует добавить слагаемое $-\frac{1}{2}(h_2^2-h_1^2)\Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)$, а величину h_1 заменить на h_2.

Поступило
2 IX 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. Н. Веригин, ДАН, 66, № 6 (1949). [2] С. И. Амосов, Тр. Ленинградск индустриальн. ин-та, № 4, в. 2 (1937). [3] П. Я. Полубаринова-Кочина Прикладн. матем. и мех., 13 (1949).