Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXI, № 1

ГЕОФИЗИКА

В. Б. ШТОКМАН

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТЕЙ ТЕЧЕНИЯ И РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПЛОТНОСТИ В ПОПЕРЕЧНОМ СЕЧЕНИИ БЕСКОНЕЧНОГО КАНАЛА В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ЭФФЕКТА ВЕТРА И БОКОВОГО ТРЕНИЯ В ПОЛЕ СИЛЫ КОРИОЛИСА

(Представлено академиком П. П. Ширшовым 14 XI 1949)

В предыдущих работах [1,2] мной были указаны уравнения, связывающие компоненты полного потока **S** в бароклинном море с полями масс и ветра. Эти уравнения имеют вид:

$$S_y = -\frac{g}{c}\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{T_x}{c} - \frac{A_l}{c^2}\frac{\partial}{\partial y}(g\nabla^2 Q + \operatorname{div}\mathbf{T}),$$
$$S_x = \frac{g}{c}\frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{T_y}{c} - \frac{A_l}{c^2}\frac{\partial}{\partial x}(g\nabla^2 Q + \operatorname{div}\mathbf{T}). \tag{1}$$

В уравнениях (1) через S_y и S_x обозначены горизонтальные компоненты результирующего полного потока в пределах от нижней горизонтальной границы бароклинного слоя ($z=0$) до поверхности моря ($z=H$):

$$S_y = \int_0^H v\,dz, \quad S_x = \int_0^H u\,dz, \tag{2}$$

где u, v — горизонтальные компоненты скорости течения вдоль осей X, Y прямоугольной системы координат; T_x, T_y — компоненты тангенциального давления ветра **T** на поверхности моря; $c = 2\omega\sin\varphi = \text{const}$ — параметр Кориолиса; g — ускорение силы тяжести; $A_l = \text{const}$ — коэффициент „бокового" турбулентного трения. Величина Q связана с распределением плотности ρ соотношением:

$$Q = \int_0^H dz \int_0^z \rho\,dz. \tag{3}$$

Вводя обозначения:

$$S'_x = \frac{T_y}{c}, \quad S'_y = \frac{-T_x}{c}, \quad S''_x = \frac{g}{c}\frac{\partial Q}{\partial y}, \quad S''_y = -\frac{g}{c}\frac{\partial Q}{\partial x}$$

и замечая, что

$$\operatorname{rot}\mathbf{S}' = -\frac{\operatorname{div}\mathbf{T}}{c}, \quad \operatorname{rot}\mathbf{S}'' = -\frac{g}{c}\nabla^2 Q, \tag{4}$$

уравнения (1) можно записать в наглядной векторной форме:

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}' + \mathbf{S}'' + \frac{A_l}{c}\overrightarrow{\operatorname{grad}\operatorname{rot}}(\mathbf{S}' + \mathbf{S}'') = \mathbf{S}' + \mathbf{S}'' + \frac{A_l}{c}\overrightarrow{\operatorname{grad}\operatorname{rot}}\,\mathbf{S}. \tag{5}$$

Уравнение (5), обладающее наглядным физическим смыслом, позволяет простым путем исследовать установившееся движение, возбуждаемое ветром в прямолинейном бесконечном канале (морском проливе).

Пусть ветер дует в направлении канала (ось Y), а скорость его меняется лишь в поперечном направлении канала (ось X).

В силу неограниченности канала и неизменной величины скорости ветра в продольном его направлении результирующий поток, возбуждаемый ветром, будет, естественно, направлен всюду по ветру. Следовательно, поперечная составляющая в полном потоке должна быть равна нулю. Так как в рассматриваемом случае нет оснований ожидать нагона в направлении ветра, то поле масс не будет меняться в направлении ветра, а потому составляющая $\mathbf{S}''$ полного потока также будет направлена по ветру, меняясь лишь в поперечном сечении канала. На этих основаниях из уравнения (5) немедленно вытекает вывод, что поперечная составляющая $\mathbf{S}'''$, обусловленная эффектом бокового трения в поле кориолисовой силы, должна компенсироваться чисто дрейфовой составляющей $\mathbf{S}'$ результирующего потока. Следовательно:

$$\frac{A_l}{c}\operatorname{grad}_x \operatorname{rot}\mathbf{S} = -S'_x, \qquad S_y = S''_y,$$

или, пользуясь указанными выше обозначениями:

$$\frac{d^2 S_y(x)}{dx^2} = -\frac{T(x)}{A_l}, \qquad S_y(x) = -\frac{g}{c}\frac{dQ}{dx}. \tag{6}$$

Интегрируя первое уравнение (6) и подчиняя результат условиям, что на берегах канала ($x=0$, $x=l$) результирующий поток $\mathbf{S}$ должен быть равен нулю, мы получим:

$$S_y = \frac{1}{A_l}\left[\frac{F(l)}{l}x - F(x)\right], \tag{7}$$

где l — поперечный размер канала, а

$$F(x) = \int dx \int T(x)\,dx. \tag{8}$$

Представляя (7) на место левой части второго уравнения (6) и интегрируя по x, получим:

$$Q = -\frac{c}{gA_l}\left[\frac{F(l)}{2l}x^2 - \psi(x)\right] + Q_0, \tag{9}$$

где Q_0 — значение Q у левого (по ветру) берега канала ($x=0$), а

$$\psi(x) = \int F(x)\,dx. \tag{10}$$

Соотношением (7) определяется величина результирующего потока в любой точке поперечного сечения канала, а соотношение (9) позволяет рассчитать интегральное распределение плотности на любой вертикали поперечного сечения канала, являющееся результатом приспособления поля масс к системе потоков, возбуждаемых ветром. Для вычисления Q необходимо знать величину Q_0 у левого берега канала, которую можно определить из данных наблюдений. Можно, однако, рассчитать и изменение плотности ρ на различных глубинах поперечного сечения канала, считая, что это распределение в стационарных условиях является результатом перестройки первоначального поля масс вследствие адаптации его к системе течений, вызванной ветром.

Пусть

$$\rho(x, z) = \rho(0) - \delta(z) f(x), \tag{11}$$

причем $\delta(z) = \rho(0) - \rho_0(z)$, где $\rho(0) = \mathrm{const}$ — постоянное значение плотности на нижней границе бароклинного слоя, где движение отсутствует ($z = 0$), а $\rho_0(z)$ — произвольное, известное вертикальное распределение плотности у левого ($x = 0$) берега канала, определяемое из океанографических наблюдений. Функция $f(x)$ должна удовлетворять условию $f(0) = 1$. Подставляя (11) в (3), получим:

$$Q = Q_0 f(x) - \rho(0) \frac{H^2}{2} f(x) + \rho(0) \frac{H^2}{2}. \tag{12}$$

Положим $H = H_0 + \zeta(x)$, гдя $H_0 = \mathrm{const}$ — толщина бароклинного слоя у левого берега канала, а $\zeta(x)$ — изменение высот точек поверхности воды (профиль ее поверхности), причем $H_0 \gg \zeta(x)$. Тогда, дифференцируя (12) по x и пренебрегая малой величиной ζ по сравнению с H_0, получим

$$\frac{dQ}{dx} \cong Q_0 \frac{df(x)}{dx} - \rho(0) \frac{H_0^2}{2} \frac{df(x)}{dx} - \rho(0) f(x) \frac{d\zeta}{dx} H_0 + \rho(0) \frac{d\zeta}{dx} H_0, \tag{13}$$

где $d\zeta/dx$ — поперечный уклон поверхности воды. Легко показать, что первые два члена в (13) обладают порядком горизонтального градиента плотности, умноженного на $H_0^2/2$, тогда как порядок последних двух членов в (13) оценивается значительно меньшей величиной $\frac{d\zeta}{dx} H_0$. Итак, вместо (13) можно с большой точностью писать:

$$\frac{dQ}{dx} \cong - \left[\rho(0) \frac{H_0^2}{2} - Q_0\right] \frac{df(x)}{dx} = -\Delta \frac{df(x)}{dx}. \tag{14}$$

Подставляя (14) в правую часть второго уравнения (6), интегрируя по x и принимая во внимание (7) вместе с условием $f(0) = 1$, мы получим:

$$f(x) = \frac{c}{gA_l\Delta} \left[\frac{F(l)}{2l} x^2 - \psi(x)\right] + 1. \tag{15}$$

Подставляя же (15) в (11), мы найдем значение плотности в любой точке поперечного сечения канала *.

Зная распределение плотности, можно определить величину скорости течения, считая его геострофическим:

$$v_z(z, x) = -\frac{g}{c} \int_0^z \frac{\partial \rho(x, z)}{\partial x} dz. \tag{16}$$

Используя (15), (11) и (6), получим:

$$v_z(z, x) = \frac{S_y(x)}{\Delta} \left[\rho(0) z - \int_0^z \rho_0(z)\, dz\right], \tag{17}$$

причем $S_y(x)$ определяется формулой (7).

Для доказательства того, что в исследуемом случае поток мало уклоняется от геострофического режима и что, следовательно, для

---

* Так как изменение температуры ϑ и солености S на вертикали $x = 0$, на основании которого определяется $\rho_0(z)$, известно, то, допуская постоянство зависимости $\vartheta = f(S)$, можно вычислить изменение ϑ и S во всем поперечнике канала.

определения скоростей можно пользоваться (17), вычислим геострофический поток $S_г$, интегрируя (17) в пределах от 0 до H:

$$S_г(x) = \int_0^H v_г(z, x)\, dz = \frac{S_y(x)}{\Delta}\left[-Q_0 + \rho(0)\frac{H^2}{2}\right] = \frac{-Q_0 + \rho(0)\frac{H^2}{2}}{-Q_0 + \rho(0)\frac{H_0^2}{2}} S_y(x).$$

В силу того, что величина $-Q_0 + \rho(0)\frac{H^2}{2}$ немного больше $-Q_0 + \rho(0)\frac{H_0^2}{2}$, геострофический поток лишь незначительно превышает точное значение потока $S_y(x)$, определяемое (7), и ошибка при вычислении $S_г$ не превышает нескольких процентов. Так как указанная погрешность является интегральной, относящейся ко всему бароклинному слою, то очевидно, что погрешность при вычислении скоростей течения по формуле (17) должна быть очень небольшой. Максимальное значение этой ошибки приходится на приповерхностный слой воды, где, очевидно, не соблюдается равенство $(A_z \partial v_г/\partial z)_{z=H} = T$ (A_z — величина коэффициента вертикального турбулентного обмена).

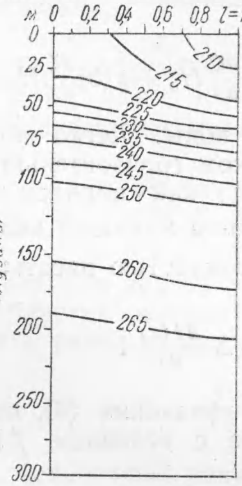

Рис. 1

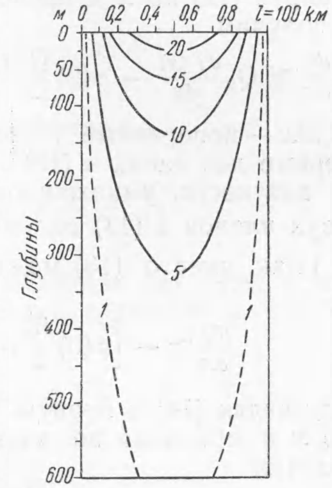

Рис. 2

В качестве приложения указанных здесь общих соотношений мы вычислили распределение плотности и скоростей течения в поперечном сечении канала, когда $T = \text{const}$. В этом случае, согласно (7) и (9):

$$S = \frac{T}{2A_l} x(l - x), \quad Q = -\frac{cT}{24\, gA_l} x^2(6\,l - 4\,x) + Q_0.$$

Полагая $l = 100$ км, $A_l = 10^8$CGS, $c = 10^{-4}$ (умеренные широты), $T = 3{,}2$ дин/см² (скорость ветра 10 м/сек.) и задавая вертикальное распределение плотности у левого берега, причем $H_0 = 1000$ м, мы построили изопикны ($\sigma_t = (\rho - 1)\,10^4$) и изотахи (см/сек.) в поперечном сечении канала, изображенные на рис. 1 и 2 (ветер дует от наблюдателя, смотрящего на рисунки).

Институт океанологии
Академии наук СССР

Поступило
29 X 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Б. Штокман, ДАН, 59, № 4 (1948). [2] В. Б. Штокман, Тр. Ин-та океанологии АН СССР, 3 (1949).