Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXI, № 1

МАТЕМАТИКА

Н. С. ШТЕЙНБЕРГ

ОБ ИНТЕРПОЛЯЦИИ НЬЮТОНА ДЛЯ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 29 XII 1949)

В статье (1) доказывается, что достаточным условием для сходимости ряда Ньютона к данной целой функции $f(z)$ является неравенство

$$\log M(r) < c(\theta)\, n(\theta r), \quad 0 < \theta < {}^1/_2,$$

где $n(r)$ — число узлов интерполяции в круге $|z| \leqslant r$, а $M(r)$ — максимум $|f(z)|$ в том же круге. Там же строится пример целой функции и соответствующих узлов интерполяции, для которых при $\theta > {}^1/_2$ выполняется условие

$$\lim_{r\to\infty} \frac{n(\theta r)}{\log M(r)} = \infty,$$

и, однако, ряд Ньютона расходится.

Остается неясным вопрос о случае $\theta = {}^1/_2$. Развивая методы И. И. Ибрагимова и М. В. Келдыша, можно доказать, что при $\theta = {}^1/_2$ также существует целая функция и соответствующие узлы интерполяции, для которых

$$\lim_{r\to\infty} \frac{n(\theta r)}{\log M(r)} = \infty$$

и, однако, соответствующий ряд Ньютона расходится. Кроме того, аналогичные теоремы получаются, если рассматривать $\theta = \theta(r)$ как функцию r, стремящуюся к ${}^1/_2$ при $r \to \infty$.

Теорема 1. *Для любой монотонно убывающей функции $\lambda(r)$ такой, что: 1) $\lim\limits_{r\to\infty} r\lambda(r) = 0$, 2) $r[{}^1/_2 - \lambda(r)]$ монотонно возрастает, существует целая функция $f(z)$ и узлы интерполяции такие, что*

$$\lim_{r\to\infty} \frac{n[r({}^1/_2 - \lambda(r))]}{r \log M(r)} = \infty$$

и, однако, соответствующий ряд Ньютона расходится.

Теорема 2. *Пусть для некоторой функции $\lambda(r) > 0$ такой, что: 1) $\lim\limits_{r\to\infty} r\lambda(r) = \infty$, 2) $r[{}^1/_2 - \lambda(r)]$ монотонно возрастает, справедливо неравенство:*

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{r \log M(r)}{n[r({}^1/_2 - \lambda(r))]} < \infty.$$

Тогда интерполяционный ряд Ньютона для $f(z)$ сходится к $f(z)$ равномерно во всякой конечной части плоскости.

Для узлов интерполяции, частота которых удовлетворяет некоторым ограничениям, теорему 2 можно заменить несколько более сильной:

Теорема 3. *Пусть узлы интерполяции* a_n $(|a_n| \leqslant |a_{n+1}|)$ *удовлетворяют двум условиям:* 1) $\lim\limits_{n\to\infty} [|a_n| - |a_{[kn]}|] = \infty$ *при некотором* k $(0 < k < 1)$; 2) *если обозначить через* $\chi(r)$ *монотонную функцию* r *такую, что* $\chi(r) = \left|\frac{a_n}{a_{[kn]}}\right| - 1$ *для* $2|a_n| \leqslant r < 2|a_{n+1}|$, *то*

$$\lim_{r\to\infty} \frac{n(r/2)}{\chi(r)\, n(r)} = 0.$$

Тогда условием, достаточным для сходимости интерполяционного ряда Ньютона к данной целой функции $f(z)$, *будет равенство*

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\log M(r)}{\chi(r)\, n(r/2)} = 0.$$

Наконец, если принять во внимание аргументы узлов интерполяции, то будет справедлива

Теорема 4. 1) *Пусть* a_n — *положительные числа такие, что* $a_{n+1} \geqslant a_n$; 2) $\theta(\varphi)$ — *непрерывная вместе со своей производной на промежутке* $[0, 2\pi]$ *функция, удовлетворяющая неравенствам* $1 - 2\theta(\varphi)\cos\varphi > 0$, $\theta(\varphi) > 0$; 3) $\lim\limits_{r\to\infty} \frac{n(\lambda r)}{n(r)} = 0$ *при любом* λ $(0 < \lambda < 1)$.

Тогда для всякой целой функции $f(z)$, *удовлетворяющей при некотором* $\varepsilon > 0$ *равномерно по* φ *условию*

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log|f(re^{i\varphi})|}{n[\theta(\varphi)\, r]} < \log\left[\frac{\sqrt{1 - 2\theta(\varphi)\cos\varphi + [\theta(\varphi)]^2}}{\theta(\varphi)} - \varepsilon\right],$$

интерполяционный ряд Ньютона с узлами интерполяции в точках a_n *сходится равномерно к* $f(z)$ *во всякой ограниченной области.*

Замечание 1. Теорема 4 обобщается на случай, когда не все узлы интерполяции положительны, но $\lim\limits_{r\to\infty} \frac{n_1(r)}{n(r)} = 1$, где $n_1(r)$ — число положительных узлов интерполяции в круге $|z| \leqslant r$.

Замечание 2. Если узлы интерполяции лежат внутри конечного числа узлов: $\alpha_n \leqslant \arg z \leqslant \beta_n$, $n = 0, 1, \ldots, N$, то для сходимости интерполяционного ряда Ньютона достаточно, чтобы внутри углов (α_n, β_n) выполнялось условие теоремы 2, а за пределами этих углов — условия теоремы 4, причем неравенство $1 - 2\theta(\varphi)\cos\varphi > 0$ нужно заменить следующим: $1 - 2\theta(\varphi)\cos\gamma > 0$, где γ — наименьшая из величин $|\varphi - \alpha_n|$ и $|\varphi - \beta_n|$.

Поступило
8 XII 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. И. Ибрагимов и М. В. Келдыш, Матем. сборн., **20** (62), № 2 (1946).