Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXI, № 1

МАТЕМАТИКА

А. Ф. ТИМАН и М. Ф. ТИМАН

ОБОБЩЕННЫЙ МОДУЛЬ НЕПРЕРЫВНОСТИ И НАИЛУЧШЕЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ В СРЕДНЕМ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 29 XII 1949)

1. Пусть $p>1$ и L_p — пространство периодических с периодом 2π функций $f(x)$, p-я степень модуля которых интегрируема, с нормой $\|f\|_{L_p}=\left\{\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^p dx\right\}^{1/p}$.

Пусть, далее, $\omega_p(f;h)$ — обобщенный модуль непрерывности и $E_n(f)_{L_p}$ — наилучшее приближение при помощи тригонометрических полиномов порядка n функции $f(x)$ в метрике пространства L_p, т. е.

$$\omega_p(f;h)=\sup_{|t|\leqslant h}\|f(x+t)-f(x)\|_{L_p};\quad E_n(f)_{L_p}=\inf_{T_n}\|f(x)-T_n(x)\|_{L_p}.$$

Известно [1], что при $0<\alpha<1$ принадлежность функции $f(x)$ к классу $Lip(\alpha, p)$ $(\omega_p(f;h)\leqslant ch^\alpha)$ равносильна соотношению

$$E_n(f)_{L_p}=O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right). \tag{1}$$

Однако известно также, что этой равносильности не будет в случае $\alpha=1$. В связи с этим А. Зигмунд ввел [2] следующий класс функций, являющийся в некотором смысле более естественным, чем класс $Lip(1,p)$. Говорят, что функция $f(x)$ принадлежит классу Λ_p, если существует константа M такая, что при любом $h>0$

$$\|f(x+h)-2f(x)+f(x-h)\|_{L_p}\leqslant Mh. \tag{2}$$

В работе [2] Зигмунд доказал, что принадлежность $f(x)$ классу Λ_p равносильна соотношению (1) при $\alpha=1$. Пользуясь результатом Quade'а о том, что функция $f(x)$, у которой $E_n(f)_{L_p}=O(1/n)$, имеет обобщенный модуль непрерывности

$$\omega_p(f;h)\leqslant M_1 h\ln\frac{1}{h}, \tag{3}$$

Зигмунд получает, таким образом, что обобщенный модуль непрерывности функций $f(x)\in\Lambda_p$ всегда удовлетворяет условию (3). Эта теорема Зигмунда допускает некоторое уточнение, показывающее, что при $p>1$ множитель $\ln(1/h)$ в правой части (3) иногда может быть понижен (например, в пространстве L_2 его можно заменить на $\sqrt{\ln(1/h)}$).

Пусть $A_0 \geqslant A_1 \geqslant A_2 \geqslant \cdots$ — произвольная монотонная нуль-последовательность чисел. Согласно известной теореме С. Н. Бернштейна [4], допускающей распространение на любое линейное нормированное полное пространство, существует функция $f(x) \in L_p$, для которой $E_n(f)_{L_p} = A_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Естественно возникает вопрос о том, для каких последовательностей $\{A_n\}$ соответствующая функция $f(x) \in L_p$ будет обладать свойством

$$\| f(x+h) - f(x-h) \|_{L_p} \leqslant MA_N, \quad h \to 0, \tag{4}$$

где $N = [1/h]$ и M — некоторая константа.

Мы указываем здесь один класс последовательностей $\{A_n\}$, удовлетворяющих этому требованию, содержащий, в частности, все последовательности, у которых $A_n = c/n^{\alpha}$, $0 < \alpha < 1$. При этом попутно можно получить новое доказательство известных теорем Quade'a, обратных теоремам типа Джексона для пространства L_p $(p > 1)$ (см. теорему 4).

2. Пусть $D_n(t)$ — ядро Дирихле и $S_n(f; x)$ — сумма Фурье порядка n функции $f(x)$. Треугольная матрица чисел

$$\lambda_k^{(n)} = \cos \frac{2k+1}{2n} \pi \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1), \tag{5}$$

представляющих собой при каждом фиксированном n все нули известного полинома П. Л. Чебышева $T_n(x) = \cos n \arccos x$, наименее уклоняющегося от нуля, определяет последовательность тригонометрических сумм

$$K_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k^{(n)} D_k(t).$$

Для каждой функции $f(x) \in L_p$ мы рассматриваем свертку ее с полиномами $K_n(t)$, т. е.

$$U_n(f; x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) K_n(x-t)\, dt = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k^{(n)} S_k(f; x). \tag{6}$$

Теорема 1. *Если $f(x) \in L_p$, $p > 1$, то при $h \to 0$ имеет место соотношение*

$$\| f(x+h) - f(x-h) \|_{L_p} = h\gamma(h) U_N(f) + O[E_N(f)_{L_p}] + O(h), \tag{7}$$

где

$$0 < c_1 \leqslant \gamma(h) \leqslant c_2 < \infty, \quad \frac{2\pi}{2N+1} < h \leqslant \frac{2\pi}{2N-1}, \quad U_n(f) = \| U_n(f; x) \|_{L_p}.$$

Пользуясь теоремой 1 и известным результатом Зигмунда о наилучшем приближении в среднем функций класса Λ_p, мы приходим к следующему утверждению.

Теорема 2*. *Для того чтобы функция $f(x)$, принадлежащая классу Λ_p, $p > 1$, удовлетворяла условию $Lip(1, p)$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$U_n(f) = O(1). \tag{8}$$

Из теоремы 2 и известной теоремы Харди и Литтльвуда [5] о функциях, удовлетворяющих условию $Lip(1, p)$, $p > 1$, вытекает

* В случае $p = 2$ можно показать, что условие $f(x) \in \Lambda_p$ в теоремах 2 и 3 излишне.

Теорема 3. *Для всякой функции $f(x) \in \Lambda_p$, $p > 1$, следующие два утверждения равносильны:*

1) *$f(x)$ почти всюду совпадает с неопределенным интегралом от функции, принадлежащей к L_p;*
2) *справедливо соотношение*

$$U_n(f) = O(1). \tag{9}$$

В частности, всякая функция $f(x) \in \Lambda_p$, $p > 1$, удовлетворяющая условию (9), почти всюду совпадает с функцией класса $lip\,\frac{p-1}{p}$ (где через $lip\alpha$, $0 < \alpha < 1$, принято обозначать класс функций $\varphi(x)$, для которых $\varphi(x+h) - \varphi(x) = o(|h|^{\alpha})$, равномерно относительно x, когда $h \to 0$).

Заметим, что, в силу хорошо известного предложения ([3]), необходимым и достаточным условием принадлежности некоторой интегрируемой функции к L_p, $p > 1$, является ограниченность в метрике этого пространства последовательности ее частных сумм Фурье. Теорема 2 является, в некотором смысле, уточнением этого факта и показывает, что ограниченность в метрике L_p последовательности $U_n(f; x)$ преобразованных посредством матрицы (5) частных сумм Фурье уже характеризует принадлежность функции $f(x)$ к более узкому классу $Lip(1, p)$ (в предположении ее принадлежности к Λ_p).

Пусть $p = 2$. В этом случае можно показать, что условие $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2(a_k^2 + b_k^2) = O(1)$ характеризует класс $Lip(1, 2)$, а условие $\sum\limits_{k=1}^{n} k^4(a_k^2 + b_k^2) = O(n^2)$ — класс Λ_2. При этом a_k, b_k — коэффициенты Фурье функции $f(x)$.

Теорема 4. *Если $f(x) \in L_p$, $p > 1$ и $h = O\left(\frac{1}{n}\right)$ то,*

$$\| \Delta_h^r f(x) \|_{L_p} = O\left\{\frac{1}{n^r} \sum_{k=1}^{n} k^{r-1} E_k(f)_{L_p}\right\}. \tag{10}$$

Следствие. Для выполнения неравенства (4) достаточно, чтобы

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} A_k = O(A_n), \quad n \to \infty. \tag{11}$$

Пример последовательности $A_n = c/n$, для которой (11) не выполняется, говорит о том, что это условие, в известном смысле, является существенным.

Приведем еще два утверждения, являющиеся непосредственными обобщениями известных теорем Хаусдорфа — Юнга ([3]) и дающие в некоторых случаях связь между наилучшими приближениями $E_n(f)_{L_p}$ и коэффициентами Фурье функции $f(x)$. Пусть $c_k = {}^1/_2(a_k - ib_k)$, $c_{-k} = \overline{c_k}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ — комплексные коэффициенты Фурье функции $f(x)$ и $q = \frac{p}{p-1}$.

Теорема 5. а) *Если $f(x) \in L_p$, $1 < p \leqslant 2$, то ряд $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^q$ сходится и имеет остаток, удовлетворяющий неравенству* $(2\pi)^{1/p} \left\{\sum\limits_{|k| > n} |c_k|^q\right\}^{1/q} \leqslant E_n(f)_{L_p}$.

б) *Если последовательность чисел такова, что* $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^p$ *при некотором* p, $1 < p \leqslant 2$, *сходится, то функция* $f(x) \in L_q$, *для которой эти числа являются комплексными коэффициентами Фурье, имеет наилучшее приближение* $E_n(f)$, *удовлетворяющее неравенству* $E_n(f)_{L_q} \leqslant (2\pi)^{1/q} \left\{ \sum_{|k|>n} |c_k|^p \right\}^{1/p}$.

Следствие. а) *Если* $f(x) \in Lip(\alpha, p)$, $1 < p \leqslant 2$, *то*

$$\left\{ \sum_{|k|>n} |c_k|^q \right\}^{1/q} = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).$$

б) *Если последовательность чисел* c_k *такова, что ряд* $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^p$ *при некотором* p, $1 < p \leqslant 2$, *сходится и имеет остаток* $\left\{ \sum_{|k|>n} |c_k|^p \right\}^{1/p} = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$, *то функция* $f(x) \in L_q$, *для которой эти числа являются комплексными коэффициентами Фурье, при* $0 < \alpha < 1$ *удовлетворяет условию* $Lip(\alpha, q)$, *а в случае* $\alpha = 1$ *принадлежит* Λ_q.

Из известной теоремы Зигмунда ([2]) мы получим, что функция $f(x)$ в следствии б) при $\alpha = 1$ имеет обобщенный модуль непрерывности $\omega_q(f; h) \leqslant Mh \ln(1/h)$. Однако следующая теорема показывает, что это заключение здесь является грубым, и в действительности множитель $\ln(1/h)$ в правой части последнего неравенства в этом случае может быть понижен.

Теорема 6. *Если последовательность чисел* c_k *удовлетворяет условию* $\left\{ \sum_{|k|>n} |c_k|^p \right\}^{1/p} = O\left(\frac{1}{n}\right)$, *то функция* $f(x) \in L_q$, *имеющая эти числа комплексными коэффициентами Фурье, обладает обобщенным модулем непрерывности* $\omega_q(f; h)$, *для которого справедливо неравенство*

$$\omega_q(f; h) \leqslant Mh\left(\ln\frac{1}{h}\right)^{1/p} \qquad (q \geqslant 2). \tag{12}$$

В частности, неравенство (12), $p = q = 2$, *имеет место для всякой функции из* Λ_2.

Поступило
19 XII 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] E. S. Quade, Duke Math. Journ., 3 (1937). [2] A. Zygmund, ibid., 12 (1945). [3] А. Зигмунд, Тригонометрические ряды, М.— Л., 1939. [4] С. Н. Бернштейн, C. R., 206, 1520 (1938). [5] G. H. Hardy and J. E. Littlewood, Math. Zs., 27, 565 (1928). [6] M. Riesz, ibid., 27, 218 (1927).