Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXI, № 1

МАТЕМАТИКА

А. МЫШКИС

ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОГО ВИДА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ ПРИ ПОМОЩИ ОБОБЩЕННОГО РЯДА ФИБОНАЧЧИ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 23 XII 1949)

Лемма. *Положим* $P_0=1$, $P_1=1$, $P_{k+1}=P_k-\lambda P_{k-1}$ $(k=1, 2, \ldots)$, *где* λ *вещественное и* $0<\lambda<{}^1/_4$. *Тогда*

$$P_k=2\lambda^{(k+1)/2}(1-4\lambda)^{-1/2}\operatorname{sh}[(k+1)\operatorname{ar\,ch}(2\sqrt{\lambda})^{-1}] \quad (k=0, 1, \ldots). \qquad (1)$$

Эту формулу легко проверить методом полной индукции.

Мы применим эту лемму к исследованию решений уравнения

$$y'(x)+M(x)y(x-\Delta(x))=0 \quad (M(x)\geqslant 0, \quad \Delta(x)\geqslant 0; \quad A\leqslant x<B), \qquad (2)$$

используя определения и обозначения п. 1 нашей статьи (1). Мы предположим, что

$$M_0<\infty, \quad \Delta_0<\infty, \quad 0<M_0\Delta_0<{}^1/_4. \qquad (3)$$

Существование и единственность решения $y(x)$ уравнения (2), удовлетворяющего заданным начальным условиям $\varphi(x)$, доказаны в (2). Обозначим далее буквой b наименьший из корней $y(x)$ при $x\geqslant A$; если таких корней нет, положим $b=B$.

Теорема 1. *Пусть* $\varphi(A)>0$ *и для некоторого натурального* n *будет* $A+(n-1)\Delta_0<B$ *и*

$$\varphi(A)\operatorname{sh}[(n+1)\operatorname{ar\,ch}(2\sqrt{M_0\Delta_0})^{-1}]- -\Phi_0\sqrt{M_0\Delta_0}\operatorname{sh}[n\operatorname{ar\,ch}(2\sqrt{M_0\Delta_0})^{-1}]>0. \qquad (4)$$

Положим

$$A_k=A+k\Delta_0 \quad (k=0, 1, \ldots, n-1), \qquad A_n=\min\{A+n\Delta_0, B\}$$

и пусть $y(x)\leqslant\varphi(A)$ *при* $A\leqslant x<b$. *Тогда*

$$y(x)\geqslant 2(M_0\Delta_0)^{(k+1)/2}(1-4M_0\Delta_0)^{-1/2}\{\varphi(A)\operatorname{sh}[(k+1)\operatorname{ar\,ch}(2\sqrt{M_0\Delta_0})^{-1}]- -\Phi_0\sqrt{M_0\Delta_0}\operatorname{sh}[k\operatorname{ar\,ch}(2\sqrt{M_0\Delta_0})^{-1}]\} \quad (A_{k-1}\leqslant x<A_k;\ k=1, \ldots, n). \qquad (5)$$

Доказательство. Отметим, прежде всего, что $\varphi(A)\leqslant\Phi_0$, а отношение

$$\sqrt{M_0\Delta_0}\operatorname{sh}[k\operatorname{ar\,ch}(2\sqrt{M_0\Delta_0})^{-1}]:\operatorname{sh}[(k+1)\operatorname{ar\,ch}(2\sqrt{M_0\Delta_0})^{-1}] \qquad (6)$$

с ростом k $(=1, 2, \ldots)$ монотонно возрастает. Отсюда и из (4) следует, что правая часть (5) положительна и при $k=1, 2, \ldots, n-1$.

Мы будем при доказательстве считать, что $y(x)>0$ $(A \leqslant x < A_n)$. Это не ограничивает общности. Действительно, пусть теорема доказана при таком предположении, а $b < A_n$. Тогда теорему можно применить на участке $[A, b)$ вместо $[A, B)$; конечно, при этом от n надо перейти к n_1 так, чтобы $A+(n_1-1)\Delta_0 < b \leqslant A+n_1\Delta_0$. Тогда из (5) получим, что $y(b)>0$, вопреки определению b.

Из положительности $y(x)$ и уравнения (2) вытекает, что $y(x)$ на интервале (A_1, A_n) является монотонно невозрастающей функцией. Поэтому из уравнения (2) получим

$$y(A_1) \geqslant \varphi(A) - M_0\Delta_0\Phi_0,$$

$$y(A_{k+1}) \geqslant y(A_k) - M_0\Delta_0 y(A_{k+1})$$

$$(k=, \ldots, n-1),$$

где под $y(A_n)$ понимается $\lim\limits_{x \to A_n} y(x)$ (существование этого предела следует из ограниченности $y'(x)$ при $A \leqslant x < A_n$, в силу (2)).

Положим

$$y(A_1) = \varphi(A) - M_0\Delta_0\Phi_0 + \delta_1,$$

$$y(A_{k+1}) = y(A_k) - M_0\Delta_0 y(A_{k-1}) + \delta_{k+1} \quad (k=1, \ldots, n-1),$$

где все $\delta \geqslant 0$. Тогда по индукции легко проверить, что

$$y(A_k) = \varphi(A) P_k - \Phi_0 M_0 \Delta_0 P_{k-1} + \sum_{j=1}^{k} \delta_j P_{k-j} \quad (k=1, \ldots, n) \qquad (7)$$

(напомним, что $y(A_0)=\varphi(A)$). Тут числа P составлены согласно лемме при $\lambda = M_0\Delta_0$. Из (7) получим

$$y(A_k) \geqslant \varphi(A) P_k - \Phi_0 M_0 \Delta_0 P_{k-1} \quad (k=1, \ldots, n),$$

откуда

$$y(x) \geqslant \varphi(A) P_k - \Phi_0 M_0 \Delta_0 P_{k-1} \quad (A_{k-1} \leqslant x < A_k;\ k=1, \ldots, n); \qquad (8)$$

при $k>1$ это следует из монотонности $y(x)$ на (A_1, A_n), а при $k=1$ — непосредственно из уравнения (2). Подставляя (1) в (8), получим (5). Теорема 1 доказана.

Обозначим далее для краткости

$$\omega = \frac{2}{1+\sqrt{1-4M_0\Delta_0}}, \quad \Omega = \frac{2}{1-\sqrt{1-4M_0\Delta_0}} \quad (1<\omega<2<\Omega).$$

Теорема 2. *Пусть $\varphi(A)>0$, $B<\infty$, $y(x) \leqslant \varphi(A)$ при $A \leqslant x < b$ и*

$$\varphi(A) > M_0\Delta_0\omega\Phi_0. \qquad (9)$$

Тогда $y(x)>0$ $(A \leqslant x < B)$, а $\lim\limits_{x \to B} y(x)$ существует и >0.

Доказательство. Отношение (6) с ростом k монотонно возрастает и стремится к $M_0\Delta_0\omega$ при $k \to \infty$. Поэтому в предположениях теоремы 2 получаем, что (4) справедливо при всех натуральных n. Взяв n таким, чтобы $A+(n-1)\Delta_0 < B \leqslant A+n\Delta_0$, сразу получим утверждение теоремы 2 при помощи теоремы 1.

Теорема 3. *Пусть* $\varphi(A)>0$, $B=\infty$, $y(x)\leqslant\varphi(A)$ *при* $A\leqslant x<b$ *и выполнено* (9). *Тогда для соответственно подобранного* $C>0$ *будет*

$$y(x)>C\exp\left[-(\Delta_0^{-1}\ln\omega)x\right]\quad(A\leqslant x<\infty).\tag{10}$$

Доказательство. Аналогично теореме 2, эта теорема вытекает из теоремы 1, так как из последней следует, что в сделанных предположениях при $k=0, 1, \ldots$ будет

$$y(A+k\Delta_0)>C_1(M_0\Delta_0)^{k/2}\operatorname{sh}\left[(k+1)\operatorname{ar\,ch}\left(2\sqrt{M_0\Delta_0}\right)^{-1}\right]>C_2\omega^{-k}$$

(где C_1 и $C_2>0$). Отсюда, из положительности $y(x)$ и монотонного неубывания $y(x)$ при $x\geqslant A+\Delta_0$ вытекает (10).

Замечание. При $\Delta_0\to 0$ выражение, стоящее в круглых скобках в правой части (10), стремится к M_0. Отсюда легко вывести точность оценки (10) в следующем смысле: если в показателе правой части (10) добавить постоянный сомножитель <1, не зависящий от Δ_0, то теорема перестанет быть верной.

Пусть $B=\infty$. Мы скажем, что $y(x)$ медленно затухает, если для некоторого $C>0$ и всех достаточно больших x будет

$$|y(x)|>C\exp\left[-(\Delta_0^{-1}\ln\omega)x\right];$$

если же для некоторого $C>0$ и всех x будет

$$|y(x)|<C\exp\left[-(\Delta_0^{-1}\ln\Omega)x\right],$$

то мы скажем, что $y(x)$ быстро затухает.

Теорема 4. *Если* $B=\infty$, *то* $y(x)$ *либо медленно затухает, либо быстро затухает.*

Доказательство. Предположим, что $y(x)$ не является медленно затухающей. Для того чтобы убедиться в быстром затухании $y(x)$, достаточно проверить, что

$$\mu_{k+1}\leqslant\Omega^{-1}\mu_k\quad(k=1, 2, \ldots),\tag{11}$$

где μ_k есть максимум $|y(x)|$ на отрезке $l_k=[A+(k-1)\Delta_0, A+k\Delta_0]$. Мы будем считать, что $\mu_{k+1}>0$.

Пусть сначала $y(x)$ имеет корни на l_{k+1}. Обозначим $\mu=\max\{\mu_k, \mu_{k+1}\}$. Тогда из уравнения (2) сразу получим, что $\mu_{k+1}<\mu=\mu_k$. Отсюда и из (3) видно, что

$$\mu_{k+1}\leqslant M_0\Delta_0\mu_k<M_0\Delta_0\omega\mu_k=\Omega^{-1}\mu_k.$$

Пусть теперь $y(x)$ не имеет корней на l_{k+1}, например, на нем $y(x)>0$. Тогда, прежде всего, $\mu_{k+1}<\mu_k$. Действительно, в противном случае из (2) получилось бы

$$\begin{aligned}y(A+(k+1)\Delta_0)&\geqslant\mu_{k+1}-\mu_{k+1}M_0\Delta_0=\\&=(1-M_0\Delta_0)\mu_{k+1}>\frac{1}{2}\mu_{k+1}>M_0\Delta_0\omega\mu_{k+1}.\end{aligned}$$

Теорема 3 (если взять $x=A+(k+1)\Delta_0$ за начальную точку) показывает, что $y(x)$ медленно затухает, вопреки предположению.

Из предыдущего абзаца и уравнения (2) следует, что

$$\nu(A+(k+1)\Delta_0) \geqslant \mu_{k+1} - \mu_k M_0 \Delta_0. \tag{12}$$

Так как $y(x)$ не является медленно затухающей, то, в силу теоремы 3, $\nu(A+(k+1)\Delta_0) \leqslant M_0\Delta_0\omega\mu_{k+1}$. Отсюда и из (12) получим:

$$\mu_k M_0 \Delta_0 \geqslant \mu_{k+1} - M_0\Delta_0\omega\mu_{k+1} = M_0\Delta_0\Omega\mu_{k+1},$$

т. е. (11). Теорема 4 доказана.

Теорема 5. *Пусть $\varphi(x) \geqslant 0$, $b < B$ и $y(x) \neq 0$ при $x > b$. Тогда совокупность всех корней $y(x)$ при $A \leqslant x < B$ состоит из единственной компоненты связности $[b, b_1]$ $(b \leqslant b_1)$. Если $B < \infty$, то $\lim\limits_{x \to B} y(x)$ существует и < 0; если же $B = \infty$, то $y(x)$ медленно затухает.*

Доказательство. Пусть условия теоремы выполнены. Убедимся, прежде всего, в справедливости утверждения теоремы о строении множества корней $y(x)$. Возьмем $x_0 \in (b, B)$ — любой корень $y(x)$. Достаточно проверить, что на (b, x_0) будет $y(x) \equiv 0$. Но пусть это не так. Тогда $y'(x)$ на $[b, x_0]$ имеет положительный максимум, откуда, в силу (2), $y(x)$ на $[b, x_0]$ имеет отрицательный минимум при $x = D$. Применяя теорему 2 или 3 к функции $-y(x)$ (взяв для этого $x = D$ за начальную точку), получим, что $y(x_0) > 0$, вопреки предположению.

Итак, утверждение о строении множества корней доказано. Очевидно, что при $b_1 < x < B$ будет $y(x) < 0$.

Если $y(x)$ на (b_1, B) не достигает наименьшего значения (что может быть только, если $B < b_1 + \Delta_0$), то из ограниченности $y'(x)$ на (b_1, B) снизу и сверху вытекает, что $\lim\limits_{x \to B} y(x)$ существует и < 0. Если же $y(x)$ достигает на (b_1, B) наименьшее значение при $x = D$, то последнее утверждение теоремы 5 следует из теорем 2 и 3 (примененных к функции $-y(x)$ при начальной точке $x = D$). Теорема 5 доказана.

Следствие. *Если $B = \infty$ и для некоторого $x_0 \in [A, \infty)$ на $[x_0, x_0 + \Delta_0]$ будет $y(x) \neq 0$, причем на $(x_0 + \Delta_0, \infty)$ $y(x)$ имеет корни, то множество этих корней связно; если оно ограничено, то $y(x)$ медленно затухает.*

Поступило
26 XI 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Мышкис, ДАН, 70, № 6, 953 (1950). [2] А. Мышкис, Усп. матем. наук, 4 : 5, 99 (1949).