Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXI, № 1

МАТЕМАТИКА

Л. А. ГУСАРОВ

О СТРЕМЛЕНИИ К НУЛЮ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

(Представлено академиком И. Г. Петровским 29 XII 1949)

Теорема 1. *Пусть в уравнении*

$$y'' + p(x)y = 0 \qquad (1)$$

а) $p(x)$ *удовлетворяет условиям существования решения для всех* $x \geqslant x_0$;

б) $p'(x)$ — *непрерывная функция ограниченной вариации для* $x \geqslant \bar{x}_0 \geqslant x_0$;

в) $q_1(x) \leqslant p(x) \leqslant [q_1(x)]^s$ *для всех* $x \geqslant \bar{x}_0 \geqslant x_0$, *где* $q_1(x)$ — *монотонно неубывающая функция такая, что* $\lim\limits_{x\to\infty} q_1(x) = \infty$ *и* s — *любое положительное число, большее или равное единице.*

Тогда все решения уравнения (1) *стремятся к нулю при* $x \to \infty$.

Доказательство. Возможны 2 случая:

1) найдется такое $\bar{x}_1 \geqslant \bar{\bar{x}}_0$, что для всех $x \geqslant \bar{x}_1$ $p'(x) \geqslant 0$;

2) не найдется такого $\bar{x}_1$.

Докажем теорему для первого случая. Обозначим полную вариацию $p'(x)$ на отрезке $[a, b]$ через $V_a^b p'(x)$.

В силу условий б) и в) теоремы найдется такое $\bar{x}_2 \geqslant \bar{x}_1$, что

$$p(\bar{x}_2) \geqslant 1; \quad \alpha = \frac{\pi}{[p(\bar{x}_2)]^{1/2}} \sup_{x \geqslant \bar{x}_2} p'(x) < 1;$$
$$V_{\bar{x}_2}^{\infty} p'(x) < 1; \quad \bar{x}_2 - \frac{\pi}{[p(\bar{x}_2)]^{1/2}} \geqslant x_0; \quad p\left(\bar{x}_2 - \frac{\pi}{[p(\bar{x}_2)]^{1/2}}\right) > 0. \qquad (2)$$

Пусть $y(x)$ — какое-нибудь решение уравнения (1) и

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots \qquad (3)$$

его нули, бо́льшие или равные $\bar{x}_2$, занумерованные в порядке возрастания. Если x_i и x_{i+1} — два следующих друг за другом нуля решения из последовательности (3), $x_{i+1} > x_i$, то, точно таким же путем, каким было доказано неравенство (17) в заметке ([1]), можно доказать неравенство:

$$[y'(x_{i+1})]^2 \leqslant [y'(x_i)]^2 \left[\frac{p(x_{i+1})}{p(x_i)}\right]^{\left(\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)} \exp\left\{\frac{\pi}{[p(x_i)]^{3/2}}\,\omega\,[p'(x);\ x_i,\ x_{i+1}]\right\}, \tag{4}$$

где $\omega\,[p'(x);\ x_i,\ x_{i+1}]$ — колебание $p'(x)$ на отрезке $[x_i,\ x_{i+1}]$.

Из (4) находим очевидным образом для любого $n \geqslant 1$:

$$[y'(x_n)]^2 \leqslant [y'(x_1)]^2 \left[\frac{p(x_n)}{p(x_1)}\right]^{\left(\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)} \exp\left\{\frac{\pi}{[p(x_1)]^{3/2}} \sum_{i=1}^{n-1} \omega\,[p'(x);\ x_i,\ x_{i+1}]\right\}. \tag{5}$$

При $x_n \leqslant x \leqslant x_{n+1}$ $p(x) \geqslant p(x_n)$, откуда, как известно ([2]), следует, что

$$\max_{x_n \leqslant x \leqslant x_{n+1}} |y(x)| \leqslant \frac{|y'(x_n)|}{[p(x_n)]^{1/2}}. \tag{6}$$

Из (6) и (5) получаем:

$$\max_{x_n \leqslant x \leqslant x_{n+1}} |y(x)| \leqslant \frac{|y'(x_1)| \exp\left\{\frac{\pi}{2\,[p(x_1)]^{3/2}} \mathrm{V}_{x_1}^{x_n} p'(x)\right\}}{[p(x_1)]^{\left(\frac{1}{4}+\frac{\alpha}{4}\right)}} [p(x_n)]^{\left(-\frac{1}{4}+\frac{\alpha}{4}\right)}. \tag{7}$$

Так как $\alpha < 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} p(x_n) = \infty$ и $p'(x)$ ограниченной вариации, то из (7) следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \max_{x_n \leqslant x \leqslant x_{n+1}} |y(x)| = 0,$$

и теорема для первого случая доказана.

Положим

$$\beta = \frac{\pi}{[p(x_1)]^{1/2}};\quad \gamma = [p(x_1)]^{\left(-\frac{1}{4}-\frac{\alpha}{4}\right)}. \tag{8}$$

Простыми рассуждениями из (5) можно получить для $x \geqslant x_1$ следующие неравенства:

$$|y'(x)| \leqslant |y'(x_1)|\,\gamma\,[p(x+\beta)]^{\left(\frac{1}{4}+\frac{\alpha}{4}\right)} \exp\left\{\frac{\beta}{2p(x_1)} \mathrm{V}_{x_1}^{x+\beta} p'(x)\right\}, \tag{9}$$

$$|y(x)| \leqslant |y'(x_1)|\,\gamma\,[p(x-\beta)]^{\left(-\frac{1}{4}+\frac{\alpha}{4}\right)} \exp\left\{\frac{\beta}{2\,p(x_1)} \mathrm{V}_{x_1}^{x} p'(x)\right\}, \tag{10}$$

которые дают оценки роста $|y'(x)|$ и убывания $|y(x)|$ при $x \to \infty$.

Перейдем ко второму случаю. В силу условий б) и в) теоремы найдется такое $\bar{x}_3 \geqslant \bar{\bar{x}}_0$, что при $x \geqslant \bar{x}_3$

$$q_1\left(\bar{x}_3 - \frac{\pi}{[q_1(\bar{x}_3)]^{1/2}}\right) > 0,\quad \max |p'(x)| \frac{\pi}{[q_1(\bar{x}_3)]^{1/2}} \leqslant \frac{q_1(\bar{x}_3)}{2},$$

$$\frac{2\pi}{[q_1(\bar{x}_3)]^{3/2}} \mathrm{V}_{\bar{x}_3}^{\infty} p'(x) < \frac{\varepsilon}{s},\quad \text{где } 0 < \varepsilon < \frac{1}{2}. \tag{11}$$

Считая, что теперь последовательность (3) состоит из нулей какого-нибудь решения $y(x)$ уравнения (1), больших или равных x_3, занумерованных в порядке возрастания, и следуя тому же ходу рассуждений, который применялся в заметке ([1]), можно вывести следующее соотношение:

$$[y'(x_m)]^2 \leqslant [y'(x_1)]^2 \left[\frac{p(x_m)}{p(x_1)}\right]^{1/2} \left\{\frac{[q_1(x_m)]^s}{q_1(x_1)}\right\}^G \exp\left\{\frac{2\pi}{[q_1(x_1)]^{3/2}} \mathrm{V}_{x_1}^{\bar{x}_m} p'(x)\right\}, \tag{12}$$

$$G = \frac{5\pi}{4[q_1(x_1)]^{3/2}} \mathrm{V}_{x_1}^{\bar{x}_m} p'(x),$$

где $\bar{x}_m$ — наименьшее значение x, большее или равное нулю x_m решения $y(x)$, при котором $p(x)$ достигает относительного минимума.

Из (11) и (12) получаем:

$$|y'(x_m)| \leqslant |y'(x_1)| \left[\frac{p(x_m)}{p(x_1)}\right]^{1/4} [q_1(x_m)]^{\varepsilon/2} \frac{e^{\varepsilon/2}}{[q_1(x_1)]^{\varepsilon/s}}. \tag{13}$$

Значения $p(x)$ при $x_m \leqslant x \leqslant x_{m+1}$, где x_m и x_{m+1} — два соседних нуля из последовательности (12), не меньше, чем

$$p(x_m) - \frac{\pi}{[q_1(x_1)]^{1/2}} \max_{x_m \leqslant x \leqslant x_{m+1}} |p'(x)| \geqslant p(x_m) - \frac{q_1(x_1)}{2}. \tag{14}$$

Из (13) и (14) заключаем, что

$$\max_{x_m \leqslant x \leqslant x_{m+1}} |y(x)| \leqslant |y'(x_1)| e^{\varepsilon/2} [q_1(x_1)]^{\left(-\frac{1}{4} - \frac{\varepsilon}{s}\right)} \times$$
$$\times \left[1 - \frac{q_1(x_1)}{2q_1(x_m)}\right]^{-1/2} [q_1(x_m)]^{\left(-\frac{1}{4} + \frac{\varepsilon}{2}\right)}.$$

Так как $\varepsilon < 1/2$ и $\lim_{m\to\infty} q_1(x_m) = \infty$, то $\lim_{m\to\infty} \max_{x_m \leqslant x \leqslant x_{m+1}} |y(x)| = 0$, и теорема доказана полностью.

Из неравенства (12), положив $q_1(x_1) = \delta$ и $\frac{\pi}{[q_1(x_1)]^{1/2}} = \Delta$, очевидным путем получим:

$$|y'(x)| \leqslant |y'(x_1)| [p(x_1)]^{-1/4} \left[p(x) + \frac{\delta}{2}\right]^{1/4} \times$$
$$\times \left\{\frac{q_1(x+\Delta)}{\delta}\right\}^H \exp\left\{\frac{2\Delta}{\delta} \mathrm{V}_{x_1}^{[x+\Delta]_*} p'(x)\right\}, \tag{15}$$

$$H = \frac{5\Delta}{4\delta} \mathrm{V}_{x_1}^{[x+\Delta]_*} p'(x),$$

$$|y(x)| \leqslant |y'(x_1)| [p(x) - \delta]^{-1/2} \left[p(x) + \frac{\delta}{2}\right]^{1/4} [p(x_1)]^{-1/4} \times$$
$$\times \left\{\frac{[q_1(x)]^s}{q_1(x_1)}\right\}^H \exp\left\{\frac{2\Delta}{\delta} \mathrm{V}_{x_1}^{[x+\Delta]_*} p'(x)\right\}, \tag{16}$$

где $[x+\Delta]_*$ — наименьшее из значений x, бо́льших или равных $x+\Delta$, при которых $p(x)$ достигает относительного минимума. Неравенства (15) и (16) дают оценки роста $|y'(x)|$ и убывания $|y(x)|$ при $x \to \infty$.

Можно доказать также справедливость следующей теоремы, которая позволяет избавиться от требования непрерывности $p'(x)$.

Теорема 2. *Если в уравнении*

$$y'' + \mu(x) y = 0 \tag{17}$$

функция $\mu(x)$ *удовлетворяет условиям существования решения для* $x \geqslant x_0$, *кусочно-непрерывна при* $x \geqslant x_1 \geqslant x_0$ *и если можно подобрать функцию* $p(x)$, *удовлетворяющую условиям* а), б) *и* в) *теоремы* 1 *и условию*

г) $$\int_{x_1}^{\infty} |\mu(x) - p(x)|\, dx < +\infty,$$

то все решения уравнения (17) *стремятся к нулю при* $x \to \infty$.

Теоремы 1 и 2 применимы и в тех случаях, когда условия для применения критериев Вимана ([3]) и Армеллини ([4]) не выполнены.

Научно-исследовательский институт математики
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова

Поступило
19 XII 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. А. Гусаров, ДАН, 68, № 2 (1949). [2] В. М. Шепелев, Прикладн. матем. и мех., 3, 1 (1936). [3] A. Wiman, Acta Math., 66, 121 (1936). [4] G. Armellini, Atti della R. Accademia Nazionale dei Lincei, 21, 111 (1935).