Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXI, № 1

МАТЕМАТИКА

М. М. ГРИНБЛЮМ

ОПЕРАТОРНЫЙ ИНТЕГРАЛ В ПРОСТРАНСТВЕ БАНАХА

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 14 XII 1949)

Результаты этой статьи тесно связаны с результатами, изложенными нами в статьях ([1], [2]). Определения и обозначения, принятые в упомянутых статьях, будут здесь применяться без специальных оговорок. Здесь, как и в ([2]), E — регулярное пространство Банаха.

§ 1. Лемма 1. *Пусть* $\{P_i\}$ — (α)-*последовательность (см.* ([1])) *и* $\sum_1^\infty P_i = E$ *и пусть* $x_i \in P_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$. *Тогда для сходимости ряда* $\sum_1^\infty x_i$ *необходимо и достаточно, чтобы существовала константа* M, *удовлетворяющая условию* $\left\|\sum_1^n x_i\right\| < M$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Лемма 2. *Пусть* $\{P_i\}$ — *бесконечная* (α)-*последовательность,* P — *наименьшее подпространство в* E (*т. е. замкнутое линейное многообразие в* E), *содержащее все* P_i $(i = 1, 2, \ldots)$, *и* $\{\lambda_n\}$ — *числовая последовательность, удовлетворяющая условию:* $\sup_n |\lambda_n| = \infty$. *Тогда элементы* $x \in P$, *для которых сходится ряд* $\sum_1^\infty \lambda_n P_n x$, *образуют линейное многообразие, плотное в* P, *но не совпадающее с* P.

Пусть $\{P_n\}$ — (α)-последовательность и $\sum_1^\infty P_i = E$. Обозначим через Q_n совокупность всех линейных функционалов, обращающихся в нуль на всех P_i, для которых $i \neq n$. Последовательность $\{Q_n\}$ мы будем называть сопряженной с $\{P_n\}$. Легко видеть, что $\{Q_n\}$ — (α)-последовательность в E^*.

Лемма 3. 1° $\sum_1^\infty Q_n = E^*$. 2° *Если* $\{P_n\}$ — (β) *последовательность, то и* $\{Q_n\}$ — (β)-*последовательность.* 3° $F(P_n(x)) = (Q_n F)\, x$ *для всякого* $F \in E^*$ *и всякого* $x \in E$.

§ 2. Здесь мы будем пользоваться термином «отрезок» в смысле определения, сделанного в ([2]).

Пусть Δ_0 — отрезок числовой прямой. Функция точки $f(\lambda)$, определенная на отрезке Δ_0, называется ступенчатой, если отрезок Δ_0 можно представить в виде суммы конечного числа отрезков, на каждом из которых $f(\lambda)$ постоянна. Если Δ_0 не совпадает с $I \equiv (-\infty, \infty)$, то, полагая $f^*(\lambda)=f(\lambda)$, если $\lambda \in \Delta_0$, и $f^*(\lambda)=0$, если $\lambda \in \Delta_0$, мы получим снова ступенчатую функцию, теперь уже определенную на всей числовой прямой.

Операторный интеграл. Пусть $P(\Delta)$ — спектральная функция, определенная (β)-парой $\{P_\lambda, P^\lambda\}$ (см. (2)). Обозначим, следуя (3), через K (или K_{Δ_0}) класс функций $f(\lambda)$, определенных на Δ_0, состоящий из всех ступенчатых функций и всех пределов равномерно сходящихся рядов ступенчатых функций.

Мы здесь определим операторный интеграл от функции $f(\lambda)$ класса K по отношению к спектральной функции $P(\Delta)$.

Пусть сначала $f(\lambda)$ — ступенчатая функция, определенная на Δ_0, и пусть $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ — отрезки, на которых $f(\lambda)$ постоянна, причем пусть $f(\lambda)=c_k$ на Δ_k $(k=1, 2, \ldots)$.

Определение 1′. Интегралом от ступенчатой функции $f(\lambda)$ по отношению к спектральной функции $P(\Delta)$ мы будем называть оператор $U(f)=\sum\limits_{1}^{m} c_k P(\Delta_k)$ и будем пользоваться обозначением $U(f)= \int\limits_{\Delta_0} f(\xi)\, P(\Delta_\xi)$. Если $x \in E$, $U(f)\,x=\int\limits_{\Delta_0} f(\xi)\, P(\Delta_\xi)\, x$. В частном случае, когда $\Delta_0 \equiv I \equiv (-\infty, \infty)$, мы условимся писать $U(f)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\, P(\Delta_\xi)$.

A_1. Пусть $f(\lambda)$, $f_1(\lambda)$, $f_2(\lambda)$ — ступенчатые функции, определенные на Δ_0. Тогда: 1° $\int\limits_{\Delta_0} (\alpha_1 f_1(\xi)+\alpha_2 f_2(\xi))\, P(\Delta_\xi)=\alpha_1 \int\limits_{\Delta_0} f_1(\xi)\, P(\Delta_\xi) + \alpha_2 \int\limits_{\Delta_0} f_2(\xi)\, P(\Delta_\xi)$. 2° $\int\limits_{\Delta_0} f_1(\xi) f_2(\xi)\, P(\Delta_\xi)=\int\limits_{\Delta_0} f_1(\xi)\, P(\Delta_\xi) \left(\int\limits_{\Delta_0} f_2(\xi)\, P(\Delta_\xi)\right)= \int\limits_{\Delta_0} f_2(\xi)\, P(\Delta_\xi) \left(\int\limits_{\Delta_0} f_1(\xi)\, P(\Delta_\xi)\right)$. 3° Если $\Delta_1 \cup \Delta_2=\Delta_0$, причем Δ_1 и Δ_2 не имеют общих точек, то $\int\limits_{\Delta_0} f(\xi)\, P(\Delta_\xi)=\int\limits_{\Delta_1} f(\xi)\, P(\Delta_\xi)+\int\limits_{\Delta_2} f(\xi)\, P(\Delta_\xi)$. 4° Если $f(\lambda)\equiv 1$, то $\int\limits_{\Delta_0} 1 P(\Delta_\xi)=\int\limits_{\Delta_0} P(\Delta_\xi)=P(\Delta_0)$ и, следовательно, если $x \in \Delta_0$, то $\int\limits_{\Delta_0} P(\Delta_\xi)\, x=x$.

A_2. $|U(f)|=\left|\int\limits_{\Delta_0} f(\xi)\, P(\Delta_\xi)\right| \leqslant \frac{4}{\beta} \sup |f(\lambda)|$.

Пусть теперь $f(\xi)$ — функция класса K и $f_n(\lambda)$ — последовательность ступенчатых функций, равномерно сходящаяся к $f(\xi)$.

Пользуясь теоремой 7 из (1), можно доказать, что если N настолько велико, что $|f_n(\lambda)-f_m(\lambda)|<\varepsilon$ при $n>N$ и $m>N$, то

$$\left|\int\limits_{\Delta_0} (f_n(\xi)-f_m(\xi))\, P(\Delta_\xi)\right| \leqslant \frac{4}{\beta}\,\varepsilon,$$

и, таким образом, последовательность операторов $\int\limits_{\Delta_0} f(\xi)\, P(\Delta_\xi)$ сходится по норме к некоторому линейному оператору $U(f)$, зависящему только от $f(\lambda)$ (но не зависящему от выбора последовательности $\{f_n(\lambda)\}$).

Определение 1. Оператор $U(f)$ называется интегралом от функции $f(\lambda)$ по отношению к спектральной функции $P(\Delta)$. Мы будем писать: $U(f)=\int\limits_{\Delta_0} f(\xi)\, P(\Delta_\xi)$ и $U(f)\,x=\int\limits_{\Delta_0} f(\xi)\, P(\Delta_\xi)\, x$.

Теорема 1. 1° $\left|\int\limits_{\Delta_0} f(\xi)\, P(\Delta_\xi)\right| \leqslant \frac{4}{\beta} \sup\limits_{\Delta_0} |f(\lambda)|$. 2° $F\left(\int\limits_{\Delta_0} f(\xi)\, P(\Delta_\xi)\, x\right)= \int\limits_{\Delta_0} f(\xi)\, F(P(\Delta_\xi)\, x)$. *Последний интеграл есть интеграл Стильтьеса, так как числовая функция отрезка $F(P(\Delta)\,x)$ имеет ограниченную вариацию* (см. (2)).

Теорема 2. *Предложения A_1 и A_2 остаются в силе также в случае, когда $f(\lambda)$, $f_1(\lambda)$ и $f_2(\lambda)$ — произвольные функции класса K.*

Теорема 3. *Пусть $\{f_n(\lambda)\}$ — последовательность функций класса K, равномерно сходящаяся к функции $f(\lambda)$. Тогда*:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\Delta_0} f_n(\xi) P(\Delta_\xi) x = \int_{\Delta_0} f(\xi) P(\Delta_\xi) x;$$

точнее,

$$\left| \int_{\Delta_0} f_n(\xi) P(\Delta_\xi) - \int_{\Delta_0} f(\xi) P(\Delta_\xi) \right| \to 0 \quad \text{при } n\to\infty.$$

§ 3. В этом параграфе мы распространим сделанное выше определение операторного интеграла на случаи, имеющие важные приложения.

Прежде всего заметим, что исследование интеграла $\int\limits_{\Delta_0} f(\xi) P(\Delta_\xi) x$ сводится к исследованию интеграла $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\xi) P(\Delta_\xi) x$, так как, полагая $f^*(\lambda) = f(\lambda)$ для $\lambda \in \Delta_0$ и $f^*(\lambda) = 0$ для $\lambda \overline{\in} \Delta_0$, получим $\int\limits_{\Delta} f(\xi) P(\Delta_\xi) x = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f^*(\xi) P(\Delta_\xi) x$.

Класс $K(\lambda_0)$. Мы будем говорить, что функция $f(\lambda)$ принадлежит к классу $K(\lambda_0)$ по отношению к спектральной функции $P(\Delta)$, если: a) λ_0 — точка непрерывности функции $P(\Delta)$ (т. е. $P(\Delta \equiv \lambda_0) \equiv \theta$). b) $\lim |f(\lambda)| = \infty$, если $|\lambda - \lambda_0| \to 0$. c) $f(\lambda)$ принадлежит классу K на любом отрезке вида $(-\infty, \lambda]$, если $\lambda < \lambda_0$, и на любом $[\lambda, \infty)$, если $\lambda > \lambda_0$.

Определение 2. Пусть $f(\lambda)$ — функция класса $K(\lambda_0)$ относительно спектральной функции $P(\Delta)$. Интегралом от функции $f(\lambda)$ по отношению к $P(\Delta) x$ $(x \in E)$, распространенным на $(-\infty, \infty)$, мы будем называть сумму $\lim\limits_{\substack{\lambda\to\lambda_0\\ \lambda<\lambda_0}} \int\limits_{(-\infty,\lambda)} f(\xi) P(\Delta_\xi) x + \lim\limits_{\substack{\lambda\to\lambda_0\\ \lambda>\lambda_0}} \int\limits_{(\infty,\lambda)} f(\xi) P(\Delta_\xi) x$, если существует каждый из этих пределов (в сильном смысле), и будем писать $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\xi) P(\Delta_\xi) x$, имея в виду эту сумму.

Пусть Ω_f — многообразие всех $x \in E$, для которых $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\xi) P(\Delta_\xi) x$ существует. Введем обозначение: $Vx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\xi) P(\Delta_\xi) x$.

Теорема 4. 1° *Ω_f есть линейное многообразие, плотное в E.* 2° *Оператор Vx замкнут.*

Теорема 5. *Пусть $f_1(\lambda)$ и $f_2(\lambda)$ — функции класса $K(\lambda_0)$. Тогда, если $x \in \Omega_{f_2}$ и $x \in \Omega_{f_1 f_2}$, то*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_2(\xi) P(\Delta_\xi) x \in \Omega_{f_1}$$

и

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi) f_2(\xi) P(\Delta_\xi) x = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi) P(\Delta_\xi) \left(\int_{-\infty}^{\infty} f_2(\xi) P(\Delta_\xi) x \right).$$

Класс $K(\infty)$. Мы будем говорить, что функция $f(\lambda)$ принадлежит к классу $K(\infty)$, если: d) на любом конечном отрезке $\Delta \subset (-\infty, \infty)$ функция $f(\lambda)$ принадлежит к классу K; e) $\lim\limits_{\lambda\to\infty} |f(\lambda)| = \lim\limits_{\lambda\to\infty} |f(\lambda)| = \infty$.

Определение 3. Пусть $f(\lambda)$ — функция класса $K(\infty)$. Интегралом от $f(\lambda)$ по отношению к $P(\Delta) x$, распространенным на $(-\infty, \infty)$, мы будем называть $\lim \int\limits_{[\alpha,\beta]} f(\xi) P(\Delta_\xi) x$ при $\alpha \to -\infty$ и $\beta \to \infty$ (независимо друг от друга), если этот предел существует, и будем писать $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\xi) P(\Delta_\xi) x$, имея в виду этот предел.

Пусть Ω_f — многообразие всех x, для которых $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\xi) P(\Delta_\xi) x$ существует. Введем обозначение $Lx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\xi) P(\Delta_\xi) x$.

Теорема 6. *Ω_f — линейное многообразие, плотное в E. Оператор Lx замкнут.*

Теорема 7. *Пусть $f_1(\lambda)$ и $f_2(\lambda)$ — функции класса $K(\infty)$. Тогда, если $x \in \Omega_{f_2}$ и $x \in \Omega_{f_1 f_2}$, то $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_2(\xi) P(\Delta_\xi) x \in \Omega_{f_1}$ и $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi) f_2(\xi) P(\Delta_\xi) x = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi) P(\Delta_\xi) \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_2(\xi) P(\Delta_\xi) x \right)$.*

Теорема 8. *Пусть $f_1(\lambda)$ — функция класса $K(\lambda_0)$, $f_2(\lambda)$ — функция класса $K(\infty)$. Тогда, если $f_1(\lambda) f_2(\lambda) = f(\lambda)$ есть функция класса K (и, значит, $\Omega_f \equiv E$), то из условия $x \in \Omega_{f_2}$ следует:*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_2(\xi) P(\Delta_\xi) x \in \Omega_{f_1} \text{ и } \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi) f_2(\xi) P(\Delta_\xi) x =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi) P(\Delta_\xi) \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_2(\xi) P(\Delta_\xi) x \right).$$

§ 4. Сопряженная пара. Пусть $\{P_\lambda, P^\lambda\}$ — пара в пространстве E. Определим для всякого λ подпространство Q_λ — совокупность всех линейных функционалов, обращающихся в нуль на P^λ, и Q^λ совокупность всех линейных функционалов, обращающихся в нуль на P_λ.

Теорема 9. 1° *Если $\{P_\lambda;\ P^\lambda\}$ — (α)-пара в E, то $\{Q_\lambda;\ Q^\lambda\}$ — (α)-пара в E^*.* 2° *Если $\{P_\lambda; P^\lambda\}$ — (β)-пара, то и $\{Q_\lambda; Q^\lambda\}$ — (β)-пара.* 3° $\rho(S_\lambda; P^\lambda) = \rho^*(S_\lambda^*; Q^\lambda)$.

Определение 4. Мы будем называть пару $\{Q_\lambda; Q^\lambda\}$ сопряженной с $\{P_\lambda; P^\lambda\}$. Если $\{P_\lambda, P^\lambda\}$ — (β)-пара и $P(\Delta)$ порожденная этой парой спектральная функция, то мы будем называть спектральную функцию $Q(\Delta)$, порожденную парой $\{Q_\lambda; Q^\lambda\}$, сопряженной с $P(\Delta)$.

Теорема 10. *Пусть $f(\lambda)$ — функция класса K и $U(f) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\xi) P(\Delta_\xi)$. Обозначим через $U^*(f)$ оператор, сопряженный с $U(f)$. Тогда $U^*(f) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\xi) Q(\Delta_\xi)$.*

Поступило
7 X 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. М. Гринблюм, ДАН, 70, № 5 (1950). [2] М. М. Гринблюм, ДАН, 70 № 6 (1950). [3] А. И. Плеснер, Усп. матем. наук, в. 9 (1941).