Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXX, № 5

МАТЕМАТИКА

А. Г. СИГАЛОВ

СУЩЕСТВОВАНИЕ АБСОЛЮТНОГО МИНИМУМА ДВОЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ В ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ФОРМЕ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 25 XI 1949)

В этой заметке дается краткое изложение доказательства существования абсолютного минимума общего квазирегулярного двойного интеграла в параметрической форме. Последний, известный автору, результат в этом направлении принадлежит Мак Шейну ([3]), который, непосредственно обобщая свой метод решения задачи Плато, доказал существование абсолютного минимума, предполагая, что подъинтегральное выражение не зависит от точки пространства.

1. Будем говорить, что поверхность T принадлежит классу L^2, если она обладает параметрическим представлением $x=f(u)$, $x=(x^1, x^2, x^3)$, $u=(u^1, u^2)$, $0 \leqslant u^1,\ u^2 \leqslant 1$, для которого все три функции $f^i(u)$ абсолютно непрерывны в смысле Тонелли и интеграл $\iint\limits_K (E+G)\,du$ конечен (K — квадрат, в котором определена $f(u)$; E и G — коэффициенты дифференциальной квадратичной формы поверхности T).

Поверхность T назовем кусочно-аналитической, если она обладает таким параметрическим представлением $x=f(u)$, что для некоторого подразделения квадрата K дугами аналитическими, включая концы, на конечное число криволинейных треугольников три функции $f^i(u)$ аналитичны в каждом из этих треугольников.

2. Положим при $T \quad x=f(u) \quad J(T)=(f, K, F)=\iint\limits_K F(x, A)\,du$, где $A=(J_1, J_2, J_3)$ — три якобиана функции $f(u)$. При $F(x, A)=\|A\|$ будем писать (f, G) вместо (f, G, F) и $A(T)$ вместо $J(T)$.

Теорема 1. *Пусть функция $F(x, A)$ определена и непрерывна для всех $x \in R^3$ и для всех A и удовлетворяет условиям:*

1) $F(x, kA)=kF(x, A)$ *при* $k>0$;

2) $F(x, A_1+A_2) \leqslant F(x, A_1)+F(x, A_2)$ *для любой пары векторов* A_1, A_2;

3) $M=\sup\limits_{\|A\|=1,\ x\in R^3} F(x, A) < +\infty, \quad m=\inf\limits_{\|A\|=1,\ x\in R^3} F(x, A)>0.$

Пусть, далее, Γ — простая жорданова кривая в R^3 и допустимые поверхности определяются тем, что они принадлежат классу L^2 и ограничены кривой Γ.

Положим: $\mu_1=\inf J(T)$ *по всем допустимым поверхностям;* $\mu_0(L^2)=\inf \underline{\lim}\, J(T_n)$, *где* $\{T_n\}$ — *произвольная последовательность поверхностей класса L^2, граничные кривые которых Γ_n сходятся* *к кривой Γ в смысле метрики Фреше и точная нижняя грань берется по всем таким последовательностям; $\mu_0(\mathfrak{P})$ определяется так же, как и $\mu_0(L^2)$, если заменить класс L^2 совокупностью полиэдров $\mathfrak{P}$.*

Тогда, если существует по крайней мере одна допустимая поверхность, то существует допустимая поверхность T, для которой $J(T) = \mu_1 = \mu_0(L^2) = \mu_0(\mathfrak{P})$.

Теорема доказывается построением минимизирующей последовательности полиэдров, удовлетворяющей излагаемому ниже критерию компактности. Полунепрерывность интеграла (f, K, F) предполагается известной (см., например, (1), (5)).

3. Пусть G — область, $G \subset K$, G' — граница области G, G_1 — бесконечная компонента дополнения G'. Дополнение замыкания области G_1 будем называть односвязной оболочкой области G и обозначать $\tilde{G}$.

Пусть

$$\lambda_-^i\{f, G\} = \inf_{u \in G} f^i(u) - \inf_{u \in G'} f^i(u),$$

$$\lambda_+^i\{f, G\} = \sup_{u \in G} f^i(u) - \sup_{u \in G'} f^i(u),$$

$$\lambda^i\{f, G\} = \max\{\lambda_-^i, \lambda_+^i\}, \quad \lambda\{f, G\} = \max\{\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3\}.$$

Если G' состоит из конечного числа аналитических дуг, обозначим через $l\{f, G'\}$ длину кривой $\{f, G'\}$, определяемой представлением f над G'. Положим при $l\{f, \tilde{G}'\} \neq 0$ $Q\{f, G\} = (f, \tilde{G}) : l\{f, \tilde{G}'\}^2$.

4. Лемма 1. *Если $x = f(u)$ — кусочно-линейная функция, G — область, ограниченная простым замкнутым полигоном, $G \subset K$, $Q\{f, G\} \geqslant M/4\pi m$, то можно определить кусочно-линейную функцию $\bar{f}(u)$, совпадающую с $f(u)$ вне области G, так, что:* 1) $\lambda\{\bar{f}, G\} = 0$, 2) $Q\{\bar{f}, G\} \leqslant 1/4\pi$ *и* 3) $(f, K, F) \geqslant (\bar{f}, K, F)$.

Для доказательства достаточно разбить односвязную область G на конечное число треугольников, не имеющих вершин внутри G, и на каждом из этих треугольников определить $\bar{f}(u)$ как линейную функцию по ее значениям в вершинах.

5. Лемма 2. *Пусть $G \subset K$ — фиксированная область, $f(u)$ — кусочно-линейная функция, $c_0 = \inf f^i(u)$ при $u \in G$, $c_1 = \inf f^i(u)$ при $u \in G'$, $u_0 \in G$, $f^i(u_0) = c_0$, G_c, $c_0 < c < c_1$, — та компонента множества $E(f^i < c)$, которая содержит точку u_0 и $Q(c) = Q\{f, G_c\}$, $l\{f, \tilde{G}_c'\} \neq 0$ при $c \in (c_0', c_1') \subset (c_0, c_1)$.*

Тогда $$\int_{c_0'}^{c_1'} \frac{dc}{\sqrt{Q(c)}} < 2\sqrt{(f, G)}.$$

Доказательство. Так как из $c' < c''$ следует $G_{c'} \subset G_{c''}$, то $A(c) = (f, G_c)$ не убывает вместе с c. Элементарные соображения показывают, что $A'(c) \geqslant l\{f, G_c'\}$, причем левая часть существует для всех $c \in (c_0, c_1)$, исключая, может быть, конечное число значений. Следовательно,

$$A'(c) \geqslant l\{f, \tilde{G}_c'\} \geqslant \sqrt{A(c)/Q(c)},$$

или $2\left(\sqrt{A(c)}\right)' \geqslant 1/\sqrt{Q(c)}$. Интегрируем это неравенство в каждом интервале, в котором $A(c)$ непрерывна, и складываем полученные неравенства.

6. Основной областью назовем каждую компоненту G множества $E(f^i < c)$ или $E(f^i > c)$, граница которой G' не имеет общих точек с K', $i = 1, 2, 3$, c произвольно.

Лемма 3. *Каковы бы ни были числа* Q^* *и* $\varepsilon > 0$, *можно найти такое* $\delta > 0$, *что для каждой кусочно-линейной функции* $f(u)$, *для которой при любой основной области* G *из* $l\{f, G'\} = 0$ *или* $Q\{f, G\} > Q^*$ *следует* $\lambda^i\{f, G\} < \varepsilon$, *имеет место: для произвольной области* G *из* $(f, G) < \delta$ *следует* $\lambda^i\{f, G\} < 2\varepsilon$.

7. Область $G \subset K$ назовем простой, если она ограничена простым замкнутым полигоном и $G' \cdot K'$ связно или пусто и отлично от одной точки. Диаметр образа при отображении множества E функцией $x = f(u)$ будем обозначать $\operatorname{Osc}\{f, E\}$.

Критерий компактности. Для компактности семейства полиэдров $\mathfrak{M} = \{P\}$ в классе L^2 относительно метрики Фреше достаточно выполнение следующих условий:

1) Площади полиэдров семейства $\mathfrak{M}$ ограничены.

2) Граничные кривые полиэдров $P \in \mathfrak{M}$ не имеют кратных точек и совокупность граничных кривых компактна относительно метрики Фреше в совокупности простых жордановых кривых.

3) Для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое Q^*, что для каждого полиэдра $P \in \mathfrak{M}$ и некоторого его кусочно-линейного представления $x = f(u)$ выполняется:

(*) Из $l\{f, G'\} = 0$ или $Q\{f, G\} > Q^*$ следует $\lambda\{f, G\} < \varepsilon$, где G — произвольная основная область.

4) Для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\eta > 0$, что для каждого полиэдра $P \in \mathfrak{M}$ и некоторого его кусочно-линейного представления $x = f(u)$ выполняется:

(**) Из $l\{f, G' - G' \cdot K'\} < \eta$, $\operatorname{Osc}\{f, G' \cdot K'\} < \eta$ следует $(f, G) < \varepsilon$, где G — произвольная простая область.

Замечание. Если (*) и (**) имеют место для кусочно-линейной функции $f(u)$ и если $f_1(u)$ получается из $f(u)$ кусочно-аналитическим преобразованием квадрата K, то (*) и (**) имеют место также для кусочно-аналитической функции $f_1(u)$.

Приведенный критерий переносится на совокупность поверхностей класса L^2.

8. Доказательство. Пусть $\{P_n\}$ — произвольная последовательность полиэдров семейства $\mathfrak{M}$. В силу условия 2) можно считать, что граничные кривые Γ_n полиэдров P_n сходятся к простой жордановой кривой Γ. Пусть $f_n(u)$ — кусочно-линейное представление полиэдра P_n. Определяем по заданному $\varepsilon > 0$ число Q^* так, что из $Q\{f_n, G\} > Q^*$ или $l\{f_n, \tilde{G}'\} = 0$ следует $\lambda\{f_n, G\} < \varepsilon/2$, $n = 1, 2, \ldots$, для любой основной области G. Затем определяем $\delta > 0$ так, чтобы оно отвечало числам $\varepsilon/2$, Q^* по лемме 3. Тогда для всех n из $(f_n, G) < \delta$ следует $\lambda\{f_n, G\} < \varepsilon$ для любой области $G \subset K$.

Определим для каждого n кусочно-линейную функцию $g_n(u)$ так, чтобы выполнялось:

1) $\|f_n(u) - g_n(u)\| < \varepsilon_n$, $u \in K$, $\varepsilon_n \to 0$;

2) ни один отрезок из K не переводится функцией $g_n(u)$ в точку;

3) различным точкам $u_1, u_2 \in K'$ отвечают различные точки $g_n(u_1)$, $g_n(u_2)$;

4) каково бы ни было $\varepsilon > 0$, можно найти такое $\delta > 0$, что из $(g_n, G) < \delta$ следует $\lambda\{g_n, G\} < \varepsilon$ для любой области G;

5) каково бы ни было $\varepsilon > 0$, можно найти такое $\delta > 0$, что при любом выборе простой области G из $l\{g_n, G' - G' \cdot K'\} < \delta$, $\operatorname{Osc}\{g_n, G' \cdot K'\} < \delta$ следует $(f_n, G) < \varepsilon$.

Чтобы удовлетворить этим условиям, следует определить $g_n(u)$ линейно во всех тех треугольниках квадрата K, в которых линейна $f_n(u)$, а значения $g_n(u)$ в вершинах этих треугольников определить так, чтобы удовлетворялись условия 2), 3) и чтобы ε_n в условии 1) стремилось к нулю достаточно быстро. Тогда условия 4) и 5) также будут удовлетворяться.

Выберем на кривой Γ три различные точки x_1, x_2, x_3 и на граничной кривой Γ'_n полиэдра P'_n, определяемого функцией $g_n(u)$, три различные точки x_{1n}, x_{2n}, x_{3n} так, что $x_{in} \to x_i$, $i = 1, 2, 3$, $n \to \infty$. Фиксируя три различные точки $u_1, u_2, u_3 \in K'$, можно найти для каждого полиэдра P'_n такое квази-конформное кусочно-аналитическое представление $h_n(u)$, что $x_{in} = h_n(u_i)$; функции h_n будут обладать свойствами 2)—5).

9. Так как при квази-конформном представлении $2(h_n, K) = \iint\limits_K (E_n + G_n)\,du$, то из условия 1) получаем $\iint\limits_K (E_n + G_n)\,du < M_1$, $n = 1, 2, \ldots$ Из последовательности $\{h_n\}$ по лемме Мак Шейна ([2]) можно выбрать подпоследовательность, равномерно сходящуюся на K'. Сохраним для нее обозначение $\{h_n\}$.

Для доказательства равностепенной непрерывности последовательности $\{h_n\}$ достаточно установить следующее предложение: каково бы ни было $\varepsilon > 0$, можно найти такое $\eta > 0$, что для каждой функции $h_n(u)$ существует подразделение квадрата K прямыми $u^1 = \alpha_j$, $u^2 = \beta_k$, $\alpha_j - \alpha_{j-1} > \eta$, $\beta_k - \beta_{k-1} > \eta$, в каждом прямоугольнике которого Π колебание $\operatorname{Osc}\{h_n, \Pi\} < \varepsilon$, $n = 1, 2, \ldots$

В доказательстве этого предложения используется понятие $\varepsilon - \delta$-решетки, введенное Юнгом ([4]).

10. Выбирая из последовательности $\{h_n\}$ равномерно сходящуюся подпоследовательность $\{h_{n_k}\}$, получим соответствующую последовательность полиэдров $\{P'_{n_k}\}$, сходящуюся к поверхности класса L^2. Последовательность $\{P_{n_k}\}$ сходится к той же поверхности.

Горьковский государственный университет

Поступило 18 XI 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] E. J. McShane, Ann. of Math., 33, 460 (1932). [2] E. J. McShane, TAMS, 35, № 3, 716 (1933). [3] E. J. McShane, TAMS, 38, № 3, 549 (1935). [4] L. S. Joung, TAMS, 64, № 2. 317 (1948). [5] А. Г. Сигалов, ДАН, 55, № 5 (1947).