Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXX, № 5

МАТЕМАТИКА

Н. А. САПОГОВ

ОБЩАЯ ФОРМА ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕКТОРОВ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 12 XII 1949)

1. Множество точек G евклидова пространства R_h $(h \geqslant 1)$ называется множеством непрерывности для заданной в том же пространстве вероятностной функции $P(G)$, если $P(G^0) = P(G) = P(\overline{G})$, где G^0 состоит из всех внутренних точек G, а $\overline{G}$ — замыкание G.

Определение множеств непрерывности, заимствованное нами из [7], восходит еще к Н. М. Гюнтеру ([3] стр. 13). Последовательность вероятностных функций $P_n(G)$ по определению A-сходится к функции $P(G)$, что записываем так:

$$(A) \lim_{n\to\infty} P_n(G) = P(G),$$

если $\lim\limits_{n\to\infty} P_n(G) = P(G)$ для всякого борелевского множества G, являющегося множеством непрерывности для $P(G)$.

Через $S_{T,x}$ будем обозначать полупространство, определяемое неравенством

$$\sum_{i=1}^{h} t_i x_i < x,$$

где $X = (x_1, \ldots, x_h)$ — точка R_h и $T = (t_1, \ldots, t_h)$ — произвольный вектор.

Теорема 1. *Если последовательность вероятностных функций $P_n(G)$, $n = 1, 2, \ldots$, сходится на полупространствах $S_{T,x}$ при каждом данном $T \neq (0, \ldots, 0)$ для почти всех x:*

$$\lim_{n\to\infty} P_n(S_{T,x}) = \overline{P}(S_{T,x}),$$

причем $\overline{P}(S_{T,x}) \to 1$, когда $x \to \infty$, то существует вероятностная функция $P(G)$, для которой

$$(A) \lim_{n\to\infty} P_n(G) = P(G).$$

Доказательство этой теоремы имеет своим основанием известную теорему Г. Крамера и Г. Волда [7] (см. также [4], теорема 31).

2. Если дан случайный вектор $X = (x_1, \ldots, x_h)$ из R_h и некоторый постоянный вектор $C = (c_1, \ldots, c_h)$, то через $X^C = (x_1^{c_1}, x_2^{c_2}, \ldots, x_h^{c_h})$ бу-

дем обозначать случайный вектор, определяемый следующими условиями: $x_i^{c_i} = x_i$, если $|x_i| \leqslant c_i$, и $x_i^{c_i} = 0$, если $|x_i| > c_i$, $1 \leqslant i \leqslant h$.

Случайные векторы $X_{nk} = (x_{nk1}, \ldots, x_{nkh})$, $1 \leqslant k \leqslant k_n$, $n = 1, 2, \ldots$, назовем равномерно пренебрегаемыми при $n \to \infty$, если для любых $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ при $n > n(\varepsilon, \delta)$

$$P\{|x_{nki}| > \varepsilon\} < \delta,$$

каковы бы ни были $1 \leqslant k \leqslant k_n$ и $1 \leqslant i \leqslant h$, где $P\{\ldots\}$ — вероятность события, указанного в скобках.

Теорема 2. *Пусть $X_{n1}, X_{n2}, \ldots, X_{nk_n}$ — последовательность серий независимых в каждой из них случайных векторов $X_{nk} = (x_{nk1}, \ldots, x_{nkh})$, $1 \leqslant k \leqslant k_n$, $n = 1, 2, \ldots$*

Для того чтобы вероятностные функции случайных векторов $S_n = \sum_{k=1}^{k_n} X_{nk} - A_n$, где $A_n = (a_{n1}, \ldots, a_{nh})$ — некоторые определенные векторы, A-сходились к нормальной вероятностной функции, имеющей первые моменты $a_i = 0$ и заданную матрицу вторых моментов $\| b_{ij} \|$, и чтобы векторы $X_{n1}, \ldots, X_{nk_n}$ были при $n \to \infty$ равномерно пренебрегаемы, необходимо и достаточно существование векторов $(\varepsilon_{n1}, \varepsilon_{n2}, \ldots, \varepsilon_{nh}) \to (0, 0, \ldots, 0)$, $n \to \infty$, при которых были бы верны соотношения $(n \to \infty)$:

$$1) \quad \sum_{k=1}^{k_n} P\left\{x_{nki} \neq x_{nki}^{\varepsilon_{ni}}\right\} \to 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant h;$$

$$2) \quad \sum_{k=1}^{k_n} M\left(x_{nki}^{\varepsilon_{ni}}\right) - a_{ni} \to 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant h;$$

$$3) \quad \sum_{k=1}^{k_n} M\left\{\left[x_{nki}^{\varepsilon_{ni}} - M\left(x_{nki}^{\varepsilon_{ni}}\right)\right]\left[x_{nkj}^{\varepsilon_{nj}} - M\left(x_{nkj}^{\varepsilon_{nj}}\right)\right]\right\} \to b_{ij}, \ 1 \leqslant i, j \leqslant h.$$

Определение используемого здесь понятия нормального распределения в R_h вместе с указанием возможных случаев вырождения дано в ([4]), гл. X. Доказательство формулированной теоремы основывается на теореме 1 и соответствующей одномерной теореме Б. В. Гнеденко (([2]), теорема 14).

Теорема 1 приводит также к многомерному обобщению теоремы А. Я. Хинчина ([2, 6]), указывающей условия, при которых предельное распределение должно быть нормальным.

Теорема 3. *Пусть $X_{nk} = (x_{nk1}, \ldots, x_{nkh})$, $1 \leqslant k \leqslant k_n$, $n = 1, 2, \ldots$ — последовательность серий независимых в каждой из них равномерно пренебрегаемых векторов; пусть вероятностные функции векторов $\left(\sum_{k=1}^{k_n} x_{nk1}, \ldots, \sum_{k=1}^{k_n} x_{nkh}\right)$ A-сходятся к некоторой предельной вероятностной функции.*

Для того чтобы эта предельная функция была нормальной, необходимо и достаточно, чтобы при $n \to \infty$

$$\sum_{k=1}^{k_n} \int_{|x| \geqslant \varepsilon} dF_{nki}(x) \to 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant h,$$

каково бы ни было $\varepsilon > 0$ ($F_{nki}(x)$ — функция распределения x_{nki}).

3. Если нормальные распределения с вероятностными функциями

$\Phi_n(G)$ имеют вторые моменты $b_{ii}=1$, первые моменты $a_i=0$ и коэффициенты корреляции $r_{ij}^{(n)}$, $1 \leqslant i,\ j \leqslant h$, и если определители $D_n = |r_{ij}^{(n)}|$ не приближаются к нулю при $n \to \infty$, т. е. $\underline{\lim}_{n\to\infty} D_n > 0$, то последовательность $\Phi_n(G)$ назовем невырождающейся и нормированной.

С помощью теоремы n°2 работы автора ([5]) доказывается следующая теорема:

Теорема 4. *Дана последовательность независимых h-мерных векторов $X_n = (x_{n1}, x_{n2}, \ldots, x_{nh})$, $n = 1, 2, \ldots$*

Пусть $P_n(G)$ — вероятностные функции векторов

$$\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} x_{k1}}{B_{n1}} - A_{n1}, \ldots, \frac{\sum_{k=1}^{n} x_{kh}}{B_{nh}} - A_{nh}\right),$$

где $B_{ni} > 0$ и A_{ni}, $1 \leqslant i \leqslant h$, — некоторые числа.

Для того чтобы можно было указать такие числа $B_{ni} > 0$ и A_{ni}, $1 \leqslant i \leqslant h$, при которых имело бы место равенство

$$\lim_{n\to\infty} [P_n(I) - \Phi_n(I)] = 0,$$

где $\Phi_n(G)$ — невырождающаяся и нормированная последовательность нормальных функций, и чтобы векторы $\left(\frac{x_{k1}}{B_{n1}}, \ldots, \frac{x_{kh}}{B_{nh}}\right)$ были равномерно, $1 \leqslant k \leqslant n$, пренебрегаемы, необходимо и достаточно существование последовательности $C_n = (c_{n1}, c_{n2}, \ldots, c_{nh})$ постоянных векторов, при которых были бы верны соотношения ($n \to \infty$):

1) $\sum_{k=1}^{n} P\left\{x_{ki}^{c_{ni}} \neq x_{ki}\right\} \to 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant h;$

2) $\frac{1}{c_{ni}^2} \sum_{k=1}^{n} D\left(x_{ki}^{c_{ni}}\right) = \frac{1}{c_{ni}^2} \sum_{k=1}^{n} \left\{M\left[\left(x_{ki}^{c_{ni}}\right)^2\right] - \left[M\left(x_{ki}^{c_{ni}}\right)\right]^2\right\} \to \infty, \quad 1 \leqslant i \leqslant h;$

3) $\underline{\lim}_{n\to\infty} \Delta_n > 0$, *где Δ_n есть определитель $|\rho_{ij}^{(n)}|$, элементы которого $\rho_{ij}^{(n)}$ суть коэффициенты корреляции между $\sum_{k=1}^{n} x_{ki}^{c_{ni}}$ и $\sum_{k=1}^{n} x_{kj}^{c_{nj}}$.*

При этом можно положить

$$A_{ni} = \frac{1}{B_{ni}} \sum_{k=1}^{n} M\left(x_{ki}^{c_{ni}}\right), \quad B_{ni}^2 = \sum_{k=1}^{n} D\left(x_{ki}^{c_{ni}}\right),$$

$$r_{ij}^{(n)} = \rho_{ij}^{(n)}, \quad 1 \leqslant i, \quad j \leqslant h, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Здесь I обозначает произвольный интервал пространства R_h, т. е. множество точек $X = (x_1, \ldots, x_h)$, удовлетворяющих условиям $a_i \leqslant x_i \leqslant b_i$, $1 \leqslant i \leqslant h$, где $a_i < b_i$ — данные числа. Эта теорема в частном случае $h = 1$ переходит в известную теорему Бернштейна — Феллера (([1]), стр. 74; ([8]) и доказательство ее для произвольного h существенно опирается на этот частный случай). Отметим, что при несколько более узких предположениях (при гипотезе существования вторых моментов) многомерную предельную теорему формулировал и доказал Б. В. Гнеденко (([2]), теорема 6).

Поступило
20 X 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Н. Бернштейн, Усп. матем. наук, 10, 65 (1944). [2] Б. В. Гнеденко. Усп. матем. наук, 10 (1944). [3] Н. М. Гюнтер, Тр. Физ.-мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1 (1932). [4] Г. Крамер, Случайные величины и распределения вероятностей, 1937. [5] Н. А. Сапогов, ДАН, 68, № 1 (1949). [6] А. Я. Хинчин, Предельные законы для сумм независимых случайных величин, 1938. [7] H. Cramer and H. Wold, Journ. London Math. Soc., 11, 290 (1936). [8] W. Feller, Math. Zs., 40, 521 (1935); 42, 301 (1937).