Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXX, № 5

МАТЕМАТИКА

В. М. ОЛОВЯНИШНИКОВ

ОЦЕНКА ОСТАТКА ПРИ ПРИБЛИЖЕНИИ НЕПРЕРЫВНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ПОЛИНОМАМИ, НАИЛУЧШИМИ В ЗАДАННОЙ СИСТЕМЕ ТОЧЕК

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 14 XII 1949)

1. С. М. Никольский [1] получил асимптотическое выражение (оценку) верхней грани абсолютных величин уклонений функции от ее интерполяционного тригонометрического полинома, распространенную, во-первых, на класс $KH^{(\alpha)}$ функций периода 2π, удовлетворяющих условию Липшица степени α с константой K, и, во-вторых, на класс $KW^{(r)}$ функций периода 2π, имеющих абсолютно непрерывную производную $(r-1)$-го порядка и почти всюду производную r-го порядка, не превышающую по абсолютной величине константы K.

Применяя в основном метод С. М. Никольского, мы получаем аналогичные выражения верхних граней $\mathcal{E}T_n(KH^{(\alpha)}, x)$ и $\mathcal{E}T_n(KW^{(r)}, x)$ в случае приближения функций тригонометрическими полиномами T_n порядка $n-1$, наилучшими в системе равноотстоящих точек $x_k = k\pi/n$, причем грань $\mathcal{E}T_n(KH^{(\alpha)}, x)$ рассматривается как частный случай грани $\mathcal{E}T_n(H_\omega, x)$, распространенной на класс H_ω функций периода 2π, при заданном модуле непрерывности $\omega(\delta)$ удовлетворяющих для любых значений x' и x'' условию

$$|f(x'')-f(x')| \leqslant \omega(|x''-x'|).$$

Теорема 1. *Имеет место равенство*

$$\mathcal{E}T_n(H_\omega, x) = \frac{1}{\pi}\,\omega\left(\frac{\pi}{n}\right)|\sin nx|\lg n + O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right), \tag{1}$$

причем

$$\mathcal{E}T_n\left(H_\omega, \frac{k\pi}{n}\right) = \frac{1}{2}\,\omega\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Теорема 2. *Имеет место равенство*

$$\mathcal{E}T_n(KW^{(r)}, x) = \frac{8K}{\pi^2 n^r}|\sin nx|\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu(r-1)}}{(2\nu+1)^{r+1}}\lg n + O\left(\frac{1}{n^r}\right), \tag{2}$$

причем

$$\mathcal{E}T_n\left(KW^{(r)}, \frac{k\pi}{n}\right) = \frac{4K}{\pi n}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu(r-1)}}{(2\nu+1)^{r+1}}.$$

2. Тригонометрический полином порядка $n-1$, дающий наилучшее приближение непрерывной периода 2π функции f в системе точек $x_k = k\pi/n$, выражается формулой

$$T_n(f, \quad = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n} G_n(x-x_k) f(x_k), \tag{3}$$

где $G_n(u) = \dfrac{\sin\frac{2n-1}{2}u}{2\sin\frac{1}{2}u}$, что можно получить из условия Чебышева.

Рассматривая (3) как линейный функционал и оценивая его норму

$$N_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n} |G_n(x-x_k)|, \tag{4}$$

получим

$$N_n(x) = \frac{2}{\pi}|\sin nx| \lg n + O(1). \tag{5}$$

3. При доказательстве теоремы 1 достаточно ограничиться случаем $0 \leqslant x < h = \pi/n$.

Ввиду того, что для любой функции f из H_ω имеем

$$|f(0) - T_n(f, 0)| \leqslant \frac{1}{2}\omega(\pi/n),$$

причем равенство имеет место для функции φ периода 2π

$\varphi(t) = (-1)^k[\omega(t-kh) - {}^1/_2\,\omega(h)] \quad (kh \leqslant t \leqslant (k+1)h, \quad k = 1, 2, \ldots, 2n-1)$,

то

$$\mathcal{E}_{T_n}(H_\omega, k\pi/n) = {}^1/_2\,\omega(\pi/n).$$

Оценка $\mathcal{E}_{T_n}(H_\omega, x)$ сводится к оценке $\sup\limits_{f \in H'_\omega} |T_n(f, x)|$, где H'_ω — подкласс функций f из H_ω, обращающихся в нуль при данном значении x.

Полагая

$$l = \left[2n - (2n-1)\frac{x}{h}\right], \tag{6}$$

мы устанавливаем, что

$$|T_n(f, x)| \leqslant \frac{1}{n}\omega\left(\frac{\pi}{n}\right)\sum_{k=1}^{2n}|g_k| + O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right), \tag{7}$$

где $$g_k = \sum_{\nu=k}^{l} G_n(x-x_\nu) \quad (k = 1, 2, \ldots, l),$$

$$g_k = \sum_{\nu=l+1}^{k} G_n(x-x_\nu) \quad (k = l+1, \ldots, 2n),$$

причем $\operatorname{sign} g_k = \operatorname{sign} G_n(x-x_k)$.

Полагая для $kh \leqslant t \leqslant (k+1)h$: $\varphi_x(t) = 0$ $(k=0)$; $\varphi_x(t) = -{}^1/_2\,\omega(t-h)$ $(k=1)$; $\varphi_x(t) = \varphi(t)$ $(k = 2, 3, \ldots, l-1)$; $\varphi_x(t) = (-1)^l\,{}^1/_2\,\omega(h)$ $(k=l)$; $\varphi_x(t) = -\varphi(t)$ $(k = l+1, \ldots, 2n-2)$; $\varphi_x(t) = -{}^1/_2\,\omega(2\pi - t)$ $(k = 2n-1)$.

мы определим функцию класса H'_{ω}, для которой $|T_n(\varphi_x, x)|$ равняется правой части (7).

Принимая во внимание, что

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}|g_k| = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n}|G_n(x-x_k)| + O(1),$$

а также равенства (4) и (5), получаем (1).

Чтобы доказать теорему 2, надо найти $\mathcal{E}_{T_n}(W^{(r)}, x)$ для $0 \leqslant x < h$ и результат умножить на K. Ясно, что $\mathcal{E}_{T_n}(W^{(r)}, 0)$ не превышает верхней грани $F_{n-1}^{(r)}$ уклонений функций f от их наилучших тригонометрических полиномов порядка $n-1$, распространенной на класс $W^{(r)}$. Известно (см., например, [2]), что

$$F_{n-1}^{(r)} = \frac{4}{\pi n^r}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu(r-1)}}{(2\nu+1)^{r+1}}. \tag{8}$$

И так как функция класса $W^{(r)}$

$$\begin{aligned} \psi(t) &= (-1)^{\frac{r-1}{2}} f_{nr}(t), \text{ если } r \text{ нечетное;} \\ \psi(t) &= (-1)^{\frac{r}{2}+1} f_{nr}(t), \text{ если } r \text{ четное,} \end{aligned} \tag{9}$$

где $f_{nr}(t) = \frac{4}{\pi n^r}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\sin\left[2(\nu+1)nt - \frac{\pi}{2}r\right]}{(2\nu+1)^{r+1}}$, дает

$$|\psi(0) - T_n(\psi, 0)| = F_{n-1}^{(r)},$$

то

$$\mathcal{E}_{T_n}\left(W^{(r)}, \frac{k\pi}{n}\right) = F_{n-1}^{(r)}.$$

Далее, легко видеть, что

$$\mathcal{E}_{T_n}(W^{(r)}, x) \leqslant F_{n-1}^{(r)} N_n(x) + O(1/n^r). \tag{10}$$

Построим теперь функцию ψ_x, для которой выражение $\psi_x(x) - T_n(\psi_x,$ равно правой части (10). Выберем коэффициенты a_ν функции $\varphi(u) = \sum_{\nu=0}^{r-1} a_\nu u^{r+\nu}$, для которой $\varphi^{(k)}(0) = 0$ $(k = 0, 1, \ldots, r-1)$, так, чтобы $\varphi^{(k)}(1) = \gamma_k$, где γ_k — произвольная последовательность чисел. Ясно, что

$$\sup_{0\leqslant u\leqslant 1}|\varphi^{(r)}(u)| \leqslant \sum_{k=0}^{r-1} c_k|\gamma_k|,$$

где c_k — положительные числа, зависящие только от r. Подстановка $u = (t-a)/\omega$ дает нам функцию $\Phi(t) = \varphi((t-a)/\omega)$, для которой имеют место равенства $\Phi^{(k)}(a) = 0$ и $\Phi^{(k)}(b) = \gamma_k/\omega^k$, где $b = a + \omega$. Кроме того,

$$\sup_{a\leqslant t\leqslant b}|\Phi^{(r)}(t)| \leqslant \frac{1}{\omega^r}\sum_{k=0}^{r-1} c_k|\gamma_k|. \tag{11}$$

Далее, пусть m_1, m_2, m_3 и m_4 — натуральные числа, удовлетворяющие условию $1 < m_1 < m_2 < l < m_3 < m_4 < 2n$, где l число (6).

Возьмем за основу функцию (9) и положим $\psi_x(t) = \psi(t)$ $(m_1 h \leqslant t \leqslant m_2 h)$, $\psi_x(t) = -\psi(t)$ $(m_3 h \leqslant t \leqslant m_4 h)$. Мы определили такую функцию ψ_x, которая в точках x_k $(k = m_1, m_1+1, \ldots, m_2, m_3, m_3+1, \ldots, m_r)$ принимает значения $F_{n-1}^{(r)} \operatorname{sign} G_n(x - x_k)$.

Заметив, что

$$|\psi_x^{(k)}(t)| \leqslant F_{n-1}^{(r-k)} \leqslant c/n^{r-k}, \tag{12}$$

где $c = \frac{4}{\pi} \max\limits_{1 \leqslant k < r} \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu(r-1)}}{(2\nu+1)^{r+1}}$, мы на отрезке $(h, m_1 h)$ определим функцию $\Phi(t)$ так, как это сделано для отрезка $(a, b = a + \omega)$, полагая $\gamma_k/\omega^k = \psi_x^{(k)}(m_1 h)$ $(k = 0, 1, \ldots, r-1)$ или $\gamma_k = (m_1 - 1)^k \pi^k \psi_x^{(k)}(m_1 h)/n^k$. Для этой функции

$$\Phi^{(k)}(h) = 0 \quad \text{и} \quad \Phi^{(k)}(m_1 h) = \psi_x^{(k)}(m_1 h) \quad (k = 0, \ldots, r-1),$$

и из (11) и (12) следует, что

$$\sup_{h \leqslant t \leqslant m_1 h} |\Phi^{(r)}(t)| \leqslant c \sum_{k=0}^{r-1} \frac{c_k}{(m_1 - 1)^{r-k} \pi^{r-k}}. \tag{13}$$

Будем считать теперь, что m_1 — наименьшее число, при котором правая часть (13) не превышает единицы, и продолжим функцию ψ_x на отрезок $(h \leqslant t \leqslant m_1 h)$, полагая $\psi_x(t) = \Phi(t)$. Затем положим $\psi_x(t) = 0$ $(0 \leqslant t \leqslant h)$. Тем же способом мы продолжим ψ_x на отрезки $(m_2 h, lh)$ $(lh, m_3 h)$ и $(m_4 h, 2\pi)$.

Построенная функция ψ_x принадлежит к классу $W^{(r)}$, и для нее

$$|\psi_x(x) - T_n(\psi_x, x)| = F_{n-1}^{(r)} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{2n} |G_n(x - x_k)| + O\left(\frac{1}{n^r}\right),$$

так как числа m_1, $l - m_2$, $m_3 - l$ и $2n - m_4$ не зависят от n.

Таким образом,

$$\mathcal{E}_{T_n}(W^{(r)}, x) = F_{n-1}^{(r)} N_n(x) + O(1/n^r).$$

Заменяя $F_{n-1}^{(r)}$ и $N_n(x)$ их выражениями (8) и (5), мы с учетом сказанного о множителе K получим (2).

Поступило
29 XI 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. М. Никольский, ДАН, 31, № 3 (1941). [2] Н. И. Ахиезер и М. Г. Крейн, ДАН, 15, № 3 (1937).