Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXX, № 5

МАТЕМАТИКА

Б. ЛЕВИН

О ФУНКЦИЯХ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫХ СВОИМИ ЗНАЧЕНИЯМИ НА НЕКОТОРОМ ИНТЕРВАЛЕ *

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 17 XII 1949)

Периодическая функция определяется своими значениями на любом интервале, длина которого равна периоду. В этой заметке мы укажем классы почти периодических функций и функций, представленных интегралами Фурье — Стильтьеса, которые также определяются своими значениями на интервале достаточно большой длины.

Рассмотрим класс T_Ω почти периодических функций Степанова (S_p), показатели Фурье которых входят в некоторое множество Ω. Обозначим через $n_\Omega(t)$ число точек множества Ω на интервале $(-t, t)$ и положим

$$N_\Omega(R) = \int\limits_0^R \frac{n(t)}{t}\,dt. \tag{1}$$

Эта функция характеризует плотность расположения точек Ω. В частности, возможно $N_\Omega(R) = \infty$.

Теорема 1. *Если S_p-функция класса T_Ω*

$$f(t) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} a_k e^{i\lambda_k t} \quad (\lambda_k \in \Omega) \tag{2}$$

обращается в нуль на интервале длины d и

$$\lim_{R\to\infty}\left[N_\Omega(R) - \frac{d}{\pi}R - \frac{1}{q}\ln R\right] = -\infty \quad \left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right), \tag{3}$$

то $f(x) \equiv 0$ почти всюду.

Наметим доказательство. Преобразование Лапласа функции $f(x)$

$$\varphi(z) = \int\limits_0^\infty e^{-zt} f(t)\,dt = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{a_k}{z - i\lambda_k} \tag{4}$$

есть мероморфная функция с простыми полюсами в точках $i\lambda_k$.

Не нарушая общности, можно считать, что функция $f(t)$ обращается в нуль на интервале $(0, d)$. Тогда из (4) можно получить

$$|\varphi(z)| \leqslant \|f\|_p \frac{e^{-dx}(1-e^{-qx})^{1/q}}{(qx)^{1/q}(1-e^{-x})} \quad \text{при} \quad x = \operatorname{Re} z > 0, \tag{5}$$

$$|\varphi(z)| \leqslant \|f\|_p \frac{(1-e^{-(qx)})^{1/q}}{(qx)^{1/q}(1-e^{-|x|})} \quad \text{при} \quad x < 0, \tag{6}$$

* Результаты, аналогичные полученным в этой заметке, были получены М. Г. Крейном другим методом.

где

$$\|f\|_p = \sup_{-\infty<u<\infty} \left\{ \int_u^{u+1} |f(t)|^p \, dt \right\}^{1/p} \; * . \tag{7}$$

Запишем для функции $\varphi(z)$ равенство Иенсена:

$$\int_0^R \frac{n_1(t)}{t} dt - \int_0^R \frac{n_2(t)}{t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln|\varphi(Re^{i\theta})| \, d\theta - \ln|\varphi(0)|, \tag{8}$$

где $n_1(t)$ — число корней и $n_2(t)$ — число полюсов функции в круге радиуса t с центром в нуле.

При $\|f_p\| \neq 0$ мы из оценок (5) и (6) будем иметь

$$\int_0^R \frac{n_2(t)}{t} dt > \frac{d}{\pi} R + \frac{1}{q} \ln R + o(1) + \int_0^R \frac{n_1(t)}{t} dt. \tag{9}$$

Заметив, что $\int_0^R \frac{n_1(t)}{t} \geqslant 0$ и $n_\Omega(t) \geqslant n_2(t)$, получим

$$N_\Omega(R) > \frac{d}{\pi} R + \frac{1}{q} \ln R + o(1).$$

Итак, выполнение (3) влечет за собою $\|f\|_p = 0$ и, следовательно, $f(x) \equiv 0$ почти всюду.

Точность оценки (3) устанавливается следующим примером. Положим

$$\varphi_1(t) = (1 - e^{it})^{-\delta}, \quad \varphi_2(t) = (1 - e^{-it})^{-\delta} \quad \text{при } 0 < t < 2\pi;$$

$$\varphi_i(t + 2\pi) = \varphi_i(t) \qquad (i = 1, 2).$$

Функция

$$f(t) = e^{i\delta t} \varphi_1(t) - e^{-i\delta t} \varphi_2(t) \tag{10}$$

при $2\delta < 1/p$ принадлежит S_p. Кроме того, $f(t) = 0$ при $0 < t < 2\pi$. Показатели Фурье S_p-функции $f(t)$ суть числа $\lambda_k = \pm(k + \delta)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ и, как легко видеть,

$$N_f(R) = 2R + (1 - 2\delta) \ln R + o(1). \tag{11}$$

Таким образом, если в (3) заменить множитель $1/q$ какой-нибудь большей величиной, то найдется функция $f(t) \in S_p$, обращающаяся в нуль на интервале $(0, d)$ и удовлетворяющая условию (3). Эти „граничные функции“ обладают интересными свойствами. С помощью одной теоремы М. Г. Крейна ([1]) можно доказать следующую теорему:

Теорема 2. *Если некоторая S_p-функция обращается в нуль на интервале $(\alpha, \alpha + d)$ и удовлетворяет условию*

$$\varliminf_{R\to\infty} \left[N_f(R) - \frac{d}{\pi} R - \sigma \ln R \right] = -\infty \quad \text{при} \quad 1 + \frac{1}{q} \geqslant \sigma > \frac{1}{q}, \tag{12}$$

то

$$f(t) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\Psi'(i\lambda_k)} e^{i\lambda_k t}, \tag{13}$$

---

* При $p = \infty$, т. е. для почти периодической функции Бора, следует положить $q = 1$, и при $p = 1$ $q = \infty$.

где $\Psi(z)$ — *целая функция конечной степени, которая представляется в форме*

$$\Psi(z) = \left(\int_0^\infty e^{-zt} f(t)\, dt\right)^{-1}$$

и при $\theta \neq +\pi/2$ *существует*

$$H(\theta) = \lim_{R\to\infty} \frac{\ln|\Psi(Re^{i\theta})|}{R} = \begin{cases} d\cos\theta & \text{при } |\theta| < \pi/2, \\ 0 & \text{при } |\pi-\theta| < \pi/2. \end{cases}$$

Пусть теперь

$$f(t) \sim \sum a_k e^{i\lambda_k t} \tag{14}$$

функция из T_Ω и все коэффициенты a_k вещественны. Выпишем числа λ_k из интервала $(-t, t)$ в порядке возрастания, выпишем в том же порядке коэффициенты $a_{-r}, a_{-r+2}, \ldots, a_{-1}, a_0, a_1, \ldots, a_s$ и обозначим: через $n'(t)$ число „знакопостоянств", т. е. число пар рядом стоящих коэффициентов одного знака, и через $n_0(t)$ — число знакоперемен в том же ряду коэффициентов*. Очевидно, $n'(t) + n_0(t) = n_\Omega(t) + 1$. Соответственно введем функции $N'(R)$ и $N_0(R)$.

Теорема 3. *Если функция* (14) $f(t)$ *обращается в нуль на интервале* $(-d/2, d/2)$ *и*

$$\lim_{R\to\infty}\left[N_0(R) - \frac{d}{\pi}R + \frac{1}{p}\ln R\right] = -\infty, \tag{15}$$

то $f(t) \equiv 0$ *почти всюду.*

Доказательство. Если $a_k a_{k+1} > 0$, то, как видно из разложения (4), функция $\varphi(z)$ — преобразование Лапласа от $f(t)$ — должна иметь корень на мнимой оси на интервале $(i\lambda_k, i\lambda_{k+1})$. Таким образом, имеем $n'(t) \leqslant n_1(t)$, где $n_1(t)$ — число корней функции $\varphi(z)$ в круге радиуса t с центром в нуле.

Из этого неравенства и формулы (8) получаем

$$\int_0^R \frac{n'(t)}{t}\, dt - \int_0^R \frac{n_2(t)}{t}\, dt \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|\varphi(Re^{i\theta})|\, d\theta - \ln|\varphi(0)|,$$

или

$$N_0(R) + \ln R \geqslant -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|\varphi(Re^{i\theta})|\, d\theta + o(1); \tag{16}$$

отсюда и из оценки

$$|\varphi(z)| \leqslant \|f\|_p \frac{e^{-\frac{d}{2}|x|}\left(1 - e^{-q|x|}\right)^{1/q}}{|qx|^{1/q}\left(1 - e^{-|x|}\right)} \qquad (x = \operatorname{Re} z \neq 0) \tag{17}$$

при $\|f\|_p \neq 0$ легко получаем

$$N_0(R) - \frac{d}{\pi}R + \frac{1}{p}\ln R > o(1),$$

что противоречит (15). Итак, $f(t) \equiv 0$ почти всюду.

Теорема 3 обобщается на функции, представленные интегралами Фурье — Стильтьеса, т. е. функции вида $f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}\, d\sigma(\lambda)$ ($\sigma(\lambda)$ — ограниченной вариации)**.

---

* Можно считать, что некоторые коэффициенты $a_k = 0$, и интервал, концу которого отвечает нулевой коэффициент, считать интервалом знакопостоянства.

** Это требование можно ослабить.

Интервал постоянства функции $\sigma(\lambda)$ мы назовем экстремальным интервалом, если в некоторой окрестности этого интервала все значения функции $\sigma(\lambda)$ не больше или не меньше, чем ее значения на этом интервале. Точки обычного экстремума функции $\sigma(\lambda)$ мы будем считать частным случаем экстремального интервала. Если в точке разрыва функции оба предельные значения функции $\sigma(\lambda)$ являются экстремальными, то мы будем считать, что в этой точке два „экстремальных интервала“.

Пусть $n_0(t)$ — число экстремальных интервалов, целиком покрытых интервалом $(-t, t)$, и, как обычно,

$$N_0(R) = \int_0^R \frac{n_0(t)}{t}\, dt.$$

Теорема 4. *Если функция*

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}\, d\sigma(\lambda)$$

обращается в нуль на интервале $(-d/2,\ d/2)$ и не равна тождественно нулю, то

$$\varliminf_{R\to\infty}\left[N_0(R) - \frac{d}{\pi} R\right] > -\infty. \tag{18}$$

Для доказательства следует апроксимировать по вариации функцию $\sigma(\lambda)$ кусочно-постоянными функциями $\sigma_\varepsilon(\lambda)$ $(\operatorname*{var}_{-\infty<\lambda<\infty} [\sigma(\lambda) - \sigma_\varepsilon(\lambda)] < \varepsilon)$ с той же самой функцией $n_0(t)$ (легко видеть, что такая апроксимация возможна). Соответственно преобразование Лапласа функции $f(t)$

$$\varphi(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(\lambda)}{z - i\lambda} \tag{19}$$

апроксимируется мероморфной функцией

$$\varphi_\varepsilon(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma_\varepsilon(\lambda)}{z - i\lambda}$$

так, что

$$|\varphi(z) - \varphi_\varepsilon(z)| \leqslant \frac{\pi\varepsilon}{|x|}.$$

Записав неравенство (16) для функции $\varphi_\varepsilon(z)$, мы можем перейти в нем к пределу при $\varepsilon \to 0$. Воспользовавшись затем неравенством

$$|\varphi(z)| \leqslant \operatorname*{var}_{-\infty<\lambda<\infty} \sigma(\lambda)\, \frac{e^{-\frac{d}{2}|x|}}{|x|},$$

аналогичным неравенству (17), мы получаем оценку (18). Теорема доказана.

Научно-исследовательский институт
математики и механики
Харьковского государственного университета

Поступило
16 XII 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. Г. Крейн, Изв. АН СССР, сер. матем., 11, 309 (1947).