Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXX, № 5

МАТЕМАТИКА

В. И. КОРОВИН

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КОМПЛЕКСА ПРЯМЫХ В ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ С СОХРАНЕНИЕМ ЕГО ИНВАРИАНТНОЙ ФОРМЫ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 13 XII 1949)

Рассмотрим комплекс, описанный ребром $r_{12} = [A_1A_2]$ тетраэдра с вершинами A_1, A_2, A_3 и A_4.

Инфинитезимальные перемещения тетраэдра будем определять уравнениями

$$dA_i = \overset{k}{\omega_i} A_k.$$

Здесь $\overset{k}{\omega_i}$ — формы Пфаффа от дифференциалов трех главных параметров; из них $\overset{3}{\omega_1}$, $\overset{3}{\omega_2}$, $\overset{4}{\omega_1}$, $\overset{4}{\omega_2}$ — главные компоненты первого порядка инфинитезимального перемещения тетраэдра, между которыми существует линейная зависимость.

Эта зависимость, ввиду произвольности расположения точек A_1, A_2 на луче комплекса и точек A_3, A_4 — в пространстве, может быть приведена к виду

$$\overset{4}{\omega_1} + \overset{4}{\omega_3} = 0. \tag{1}$$

Главные компоненты тетраэдра второго порядка имеют вид

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \alpha\overset{3}{\omega_1} + \beta\overset{3}{\omega_2} + \gamma\overset{4}{\omega_2}, \\ \omega_2 &= \beta\overset{3}{\omega_1} + \eta\overset{3}{\omega_2} + \beta_1\overset{4}{\omega_2}, \\ \omega_3 &= \gamma\overset{3}{\omega_1} + \beta_1\overset{3}{\omega_2} + \alpha_1\overset{4}{\omega_2}, \end{aligned} \tag{2}$$

где

$$\omega_1 = \overset{4}{\omega_3} - \overset{1}{\omega_2}, \quad \omega_2 = \overset{1}{\omega_1} - \overset{2}{\omega_2} + \overset{3}{\omega_3} - \overset{4}{\omega_4}, \quad \omega_3 = \overset{3}{\omega_4} - \overset{2}{\omega_1}.$$

Существуют две относительные инвариантные формы

$$\varphi = \overset{3}{\omega_1}\overset{4}{\omega_2} + (\overset{3}{\omega_2})^2 \quad \text{и} \quad f = 3\psi - (\eta + 4\gamma)\varphi,$$

где

$$\psi = \omega_1\overset{3}{\omega_1} + \omega_2\overset{3}{\omega_2} + \omega_3\overset{4}{\omega_2}.$$

Обращение в нуль формы φ выделяет направления, при перемещении по которым луч $[A_1A_2]$ описывает развертывающиеся поверхности.

Обращение формы f в нуль выделяет те направления, для которых весь пучок линейных касательных к изучаемому комплексу будет соприкасающимся.

Из форм φ и f можно составить абсолютную инвариантную форму

$$I_1 = \frac{f^2}{\varphi}. \tag{3}$$

Теорема. *Если между лучами двух комплексов r_{12} и r'_{12} установлено взаимно-однозначное соответствие и абсолютные инвариантные формы их I_1 и I'_1 равны, то комплексы r_{12} и r'_{12} проективно эквивалентны.*

Равенство

$$I_1 = I'_1$$

приводит к исследованию следующих двух систем:

$$\begin{gathered}\Omega_1^3 = \omega_1^3, \quad \Omega_2^3 = \omega_2^3, \quad \Omega_2^4 = \omega_2^4, \quad \Omega_1^4 = \omega_1^4, \\ \alpha = \alpha', \quad \beta = \beta', \quad \eta - 2\gamma = \eta' - 2\gamma', \quad \beta_1 = \beta_1, \quad \alpha_1 = \alpha_1;\end{gathered} \tag{4}$$

$$\begin{gathered}\Omega_1^3 = \omega_1^3, \quad \Omega_2^3 = \omega_2^3, \quad \Omega_2^4 = \omega_2^4, \quad \Omega_1^4 = \omega_1^4, \\ \alpha = -\alpha', \quad \beta = -\beta', \quad \eta - 2\gamma = -(\eta' - 2\gamma'), \quad \beta_1 = -\beta'_1, \quad \alpha_1 = -\alpha'_1,\end{gathered} \tag{5}$$

где Ω_i^k — компоненты инфинитезимального перемещения репера второго комплекса r'_{12}.

Система (4) приводит к полному совпадению форм ω_i^k и Ω_i^k комплексов r_{12} и r'_{12}.

Система (5) приводит к следующей таблице компонент второго комплекса

$$\begin{array}{cccc} -\omega_3^3 & \omega_4^3 & \omega_1^3 & -\omega_2^3 \\ \omega_3^4 & -\omega_4^4 & \omega_2^3 & \omega_2^4 \\ \omega_3^1 & -\omega_4^1 & -\omega_1^1 & \omega_2^1 \\ -\omega_3^2 & \omega_4^2 & \omega_1^2 & -\omega_2^2 \end{array}$$

В этом случае комплекс r'_{12} может быть приведен в совпадение с r_{12} путем коррелятивного преобразования пространства.

Изгибание комплекса. Будем теперь рассматривать преобразование комплекса с сохранением пропорциональности абсолютной инвариантной формы I. Это преобразование можно назвать изгибанием комплекса по аналогии с изгибанием поверхности с сохранением линейного элемента.

Пусть установлено взаимно-однозначное соответствие между лучами двух комплексов. Будем искать пары комплексов, у которых в этом соответствии абсолютные инвариантные формы пропорциональны.

Условие пропорциональности форм

$$I' = \rho I$$

приводит к исследованию системы

$$\begin{gathered}\overline{\Omega}_1^3 = \overline{\Omega}_2^3 = \overline{\Omega}_2^4 = \overline{\Omega}_1^4 = 0, \\ \Omega_1 = \rho\omega_1, \quad \Omega_2 = \rho\omega_2 \quad \Omega_3 = \rho\omega_3, \\ \omega_1 = \alpha\omega_1^3 + \beta\omega_2^3 + \gamma\omega_2^4, \\ \omega_2 = \beta\omega_1^3 + \eta\omega_2^3 + \beta_1\omega_2^4, \\ \omega_3 = \gamma\omega_1^3 + \beta_1\omega_2^3 + \alpha_1\omega_2^4,\end{gathered} \tag{6}$$

где

$$\overline{\Omega}_i^k = \Omega_i^k - \omega_i^k.$$

Как известно [1], комплексы делятся на типы по расположению инфлекционных центров на луче $[A_1A_2]$. Будем рассматривать изгибание пяти типов комплексов.

1. Комплекс A (у которого все четыре инфлекционных центра совпадают) существует с произволом трех функций одного аргумента.

Пары налагающихся комплексов зависят от четырех функций одного аргумента. Все комплексы A изгибаются.

Если комплекс задан, то семейство налагающихся на него комплексов зависит от одной произвольной функции одного аргумента.

2. Комплекс B (у которого три инфлекционных центра совпадают, а четвертый от них отличен) существует с произволом пяти функций одного аргумента.

Пары налагающихся комплексов зависят от четырех произвольных функций одного аргумента.

Не все комплексы B допускают изгибание. Если один комплекс задан, то существует однопараметрическое семейство налагающихся на него комплексов.

3. Комплекс C (у которого инфлекционные центры совпадают попарно) существует с произволом четырех функций одного аргумента.

Пары налагающихся комплексов зависят от шести произвольных функций одного аргумента. Следовательно, все комплексы C допускают изгибание.

4. Комплекс D (у которого два инфлекционных центра совпадают, два других различны) существует с произволом двух функций двух аргументов.

Пары налагающихся комплексов зависят от пяти произвольных функций одного аргумента. Не все комплексы D допускают изгибание.

Если один комплекс задан, то существует однопараметрическое семейство налагающихся на него комплексов.

5. Комплекс E (у которого все четыре инфлекционных центра различны) существует с произволом одной функции трех аргументов.

Пары налагающихся комплексов зависят от шести произвольных функций одного аргумента.

Не все комплексы E допускают изгибание. Существует однопараметрическое семейство комплексов, налагающихся на заданный.

Система (1), определяющая пары налагающихся комплексов в смысле Картана [2], является частью системы (6), поэтому все комплексы, изгибаемые с сохранением пропорциональности формы I, изгибаемы также в смысле Картана.

В заключение выражаю глубокую благодарность проф. С. П. Финикову, под руководством которого была написана эта работа.

Поступило
18 XI 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] P. Mentré, Les variétés de l'espace reglé étudiées dans leurs propriétés infinitésimales, 1923. [2] E. Cartan, C. R. Congrès Strasbourg, 1920, 1921, p. 397.