Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXX, № 5

МАТЕМАТИКА

М. М. ГРИНБЛЮМ

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ПРОСТРАНСТВА ТИПА B В ВИДЕ ПРЯМОЙ СУММЫ ПОДПРОСТРАНСТВ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 14 XII 1949)

§ 1. Пусть E — пространство Банаха (вообще комплексное); X и Y — замкнутые подпространства этого пространства. Обозначим через $\mathfrak{E}$ многообразие всех элементов $z \in E$, имеющих вид $z = x + y$, $x \in X$ и $y \in Y$. Если $X \cap Y = \theta$, то мы будем говорить, что $\mathfrak{E}$ есть прямая сумма X и Y, и писать: $\mathfrak{E} = X + Y$. Условимся обозначать через S_X поверхность единичной сферы в X, а через S_Y — в Y. Наконец, обозначим через P многообразие всех линейных функционалов, обращающихся в нуль на Y и через Q — на X*.

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{E}$ плотно в E. Для того чтобы пространство E являлось прямой суммой подпространств X и Y, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*: $\rho(S_X, S_Y) > 0$.

Доказательство. Пусть $E = X + Y$. Пусть $X \neq \theta$. Тогда $z = U(z) + V(z) = x + y$, где $x = U(z)$ и $y = V(z)$ — линейные операторы на E. Пусть $x \in S_X$ и $y \in Y$. Тогда $1 = \|x\| = \|U(x+y)\| \leqslant |U| \|x+y\|$, откуда $\|x+y\| \geqslant 1/|U|$, т. е. $\rho(S_X, Y) \geqslant 1/|U|$, а поэтому и $\rho(S_X, S_Y) > 0$. Пусть теперь $\rho(S_X, S_Y) > 0$. Тогда $\rho(S_X, Y) = \alpha > 0$. Пусть $z \in \mathfrak{E}$, $z = x + y$, $\|z\| = 1$. Мы будем иметь:

$$1 = \|z\| = \|x + y\| = \|x\| \left\| \frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|x\|} \right\| \geqslant \|x\| \alpha, \quad \|x\| \leqslant \frac{1}{\alpha}$$

и, следовательно, определенный на $\mathfrak{E}$ оператор $x = U(z)$ линеен (а значит, линеен и $y = V(z)$) и поэтому может быть продолжен на все E. Так как $U(x) = x$ для $x \in X$ и $V(y) = y$ для $y \in Y$, то все доказано.

Замечание. Из доказанного следует, что $\rho(S_X, Y) = 1/|U|$.

Условимся обозначать линейные функционалы, определенные на E, X и Y, соответственно через F, φ и ψ, и пусть $|F| = \sup\limits_{\|z\| \leqslant 1} |F(z)|$; $|\varphi| = \sup\limits_{\|x\| \leqslant 1} |\varphi(x)|$ и $|\psi| = \sup\limits_{\|y\| \leqslant 1} |\psi(y)|$. Далее через F_φ обозначим линейный функционал, совпадающий с φ на X и равный нулю на Y. Очевидно, что если F_φ существует, то он единственный. Очевидно также, что всякий линейный функционал F есть F_φ для некоторого φ и притом единственного. Y есть многообразие всех элементов $z \in E$, удовлетворяющих уравнению $F_\varphi(z) = 0$ для любого $\varphi \in X^*$, а X — уравнению $F_\psi(z) = 0$ для любого $\psi \in Y^*$.

Теорема 2. *Пусть $X + Y$ плотно в E. Для того чтобы было $E = X + Y$, необходимо и достаточно, чтобы для каждого $\varphi \in X^*$ существовал F_φ.*

---

* Результаты § 1 настоящей статьи были впервые изложены автором в начале 1941 г. на семинаре по анализу и геометрии в Воронежском государственном университете.

Доказательство. Необходимость. Так как $E=X+Y$, то $\rho(S_x, Y)=\alpha>0$. Пусть φ — линейный функционал на X. Обозначим через F^* линейный функционал, удовлетворяющий условию: $F^*(z)=F^*(x+y)=\varphi(x)$. Пусть, далее, $z=x+y$, $\|z\|=1$. Тогда $|F^*(z)|=|\varphi(x)|\leqslant|\varphi|\ \|x\|\leqslant|\varphi|\frac{1}{\alpha}$ и $\sup\limits_{\|z\|\leqslant 1}|F^*(z)|\leqslant\frac{1}{\alpha}|\varphi|$, т. е. F^* линеен, а значит, $F^*=F_\varphi$.

Достаточность. Пусть всякому $\varphi\in X^*$ соответствует F_φ. Так как $|\varphi|\leqslant|F_\varphi|$, то $F_\varphi\to\varphi$ есть линейное отображение замкнутого линейного многообразия P на пространство X^*. Но тогда, по известной теореме, линейно и обратное отображение, и поэтому существует такое M, что $|F_\varphi|\leqslant M|\varphi|$. Пусть теперь $x_0\in S_X$ и $\varphi_0\in X^*$ такой линейный функционал, что $|\varphi_0|=1$ и $\varphi_0(x_0)=\|x_0\|=1$. Так как $|F_{\varphi_0}|\leqslant M|\varphi_0|=M$ и $F_{\varphi_0}(y)=0$ для $y\in Y$, то для любого $y\in Y$ будем иметь: $1=\varphi_0(x_0)=F_{\varphi_0}(x_0)=F_{\varphi_0}(x+y)\leqslant M\|x_0+y\|$, откуда $\|x_0+y\|\geqslant 1/M$ и $\rho(S_x, Y)\geqslant 1/M$, а значит, $E=X+Y$.

Из доказанного следует, что $M\leqslant\rho(S_X, Y)$ и что $1/\rho(S_X, Y)$ есть наименьшее из чисел M, удовлетворяющих соотношению $|F_\varphi|\leqslant M|\varphi|$.

Теорема 3. *Пусть X — подпространство в E. Если существует такое регулярно замкнутое линейное многообразие $P_0\subset E^*$, что всякому φ соответствует единственный функционал $F\in P_0$, удовлетворяющий условию $F(x)=\varphi(x)$ для всех $x\in X$, то $E=X+Y$, где Y есть пересечение нулевых гиперплоскостей линейных функционалов, составляющих P.*

Доказательство. Из того, что P_0 регулярно замкнуто, следует, что $X+Y$ плотно в E, и все сводится к теореме 2.

Теорема 4. *Если $E=X+Y$, то $E^*=P+Q$, и при этом $\rho(S_X; Y)=\rho^*(S_P^*; Q)$.*

Доказательство. Пусть $F\in E^*$. Пусть $p\in E^*$—такой линейный функционал, что $p(x)=F(x)$ для $x\in X$ и $p(y)=0$ для $y\in Y$, а $q\in E^*$— такой, что $q(x)=0$ для $x\in X$ и $q(y)=F(y)$ для $y\in Y$. Тогда $F=p+q$, $p\in P$, $q\in Q$. Пусть теперь $\rho(S_X; Y)=\alpha$ и $\rho(S_P; Q)=\beta$. Покажем, что $\alpha=\beta$. Пусть $F=p+q$, $p\in P$ и $q\in Q$. Замечая, что если $z=x+y$ и $\|z\|=1$, то $\|x\|\leqslant 1/\alpha$, мы будем иметь: $|p|=\sup\limits_{\|z\|\leqslant 1}|p(z)|=\sup\limits_{\|z\|=\|x+y\|\leqslant 1}|p(x)|=\sup\limits_{\|z\|=\|x+y\|=1}|F(x)|\leqslant|F|\frac{1}{\alpha}$. Итак, $|p|\leqslant\frac{1}{\alpha}|F|$ для всех $F\in E^*$. Но $1/\beta$ есть наименьшее из чисел μ, удовлетворяющих соотношению $|p|\leqslant\mu|F|$, и поэтому $1/\alpha\geqslant 1/\beta$, или $\alpha\leqslant\beta$. Обозначим через T и R многообразия линейных функционалов $F\in E^{**}$, обращающихся в нуль, соответственно, на Q и на P. Тогда $E^{**}=T+R$ и $\rho(S_T; R)=\gamma>0$. Но $\rho(S_T; R)\leqslant\rho(S_X; Y)$, так как $S_X\subset S_T$ и $Y\subset R$. Таким образом, $\gamma\leqslant\alpha$. С другой стороны, $E^{**}=(E^*)^*$, и поэтому $\beta\leqslant\gamma$, откуда, помня, что $\alpha\leqslant\beta$, получаем $\alpha=\beta$.

§ 2. Пусть $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$ — подпространства в E, т. е. замкнутые линейные многообразия в E. Обозначим через P наименьшее подпространство в E, содержащее все P_n $(n=1, 2, \ldots)$, причем $P_1\neq\theta$. Далее будем обозначать через $P_{n_1n_2\ldots n_m\ldots}$ наименьшее подпространство, содержащее все P_{n_m} (здесь $n_1<n_2<\ldots\ldots n_m<\ldots$ — какая-нибудь последовательность индексов); через $P^{n_1n_2\ldots n_m\ldots}$ — наименьшее подпространство, содержащее все P_i, для которых $i\neq n_m$ $(m=1, 2, \ldots)$. В том случае, когда $P=P_{n_1n_2\ldots}+P^{n_1n_2\ldots}$, мы будем через $P_{n_1n_2\ldots}$ и $P^{n_1n_2\ldots}$ обозначать не только многообразия, но и соответствующие проекционные операторы, определенные на P. Нормы этих операторов будут обозначаться через $|P_{n_1n_2\ldots}|_P$ и $|P^{n_1n_2\ldots}|_P$. Наконец, условимся обозначать через $S_{n_1n_2\ldots}$

поверхность единичной сферы в $P_{n_1 n_2 \ldots}$ и через $S^{n_1 n_2 \ldots}$ — в $P^{n_1 n_2 \ldots}$. Пусть Π — многообразие всех элементов $x \in P$, представимых в виде $x = \sum_1^{\infty} x_i$, где $x_i \in P_i$. Если каждый элемент из Π может быть представлен в виде $\sum_1^{\infty} x_i$ только одним способом, то мы будем говорить, что Π есть прямая сумма подпространств $P_1, P_2, \ldots$, $\Pi = \sum_1^{\infty} P_i$.

Определение 1. $\{P_n\}$ называется (α)-последовательностью, или (α)-системой, если для любого n выполняется условие: $\rho(S_{12\ldots n}; P^{12\ldots n}) \geqslant \alpha > 0$, причем α не зависит от n.

Определение 2. $\{P_n\}$ называется (β)-последовательностью, или (β)-системой, если для любой конечной последовательности индексов $n_1, n_2, \ldots, n_q$ выполняется условие: $\rho(S_{n_1 n_2 \ldots n_q}; P^{n_1 n_2 \ldots n_q}) \geqslant \beta$, где β не зависит от $n_1, n_2, \ldots, n_q$*.

Пусть $\{P_n\}$ — (α)-система.

A_1. $P_{n_1 n_2 \ldots n_q} = \sum_1^{q} P_i$ для всякой конечной последовательности индексов.

A_2. Для любого n будем иметь: $P = P_{12\ldots n} + P^{12\ldots n}$ и $P = P_n + P^n$. Последнее соотношение следует из того, что $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}, P^{n+1}, \ldots$ есть также (α)-система.

A_3. Из теоремы 1 следует, что $|P_{12\ldots n}|_P \leqslant 1/\alpha$, так как $\rho(S_{12\ldots n}; P^{12\ldots}) \geqslant \alpha$. Легко видеть также, что при $i \neq j$ будем иметь: $P_i(P_j(z)) = \theta$ для всякого $z \in P$.

Теорема 5. *Для того чтобы P было прямой суммой подпространств $P_1, P_2, \ldots$, или, что то же самое, для того чтобы Π было замкнуто, необходимо и достаточно, чтобы $\{P_i\}$ являлась (α)-последовательностью.*

Доказательство. Достаточность. Во-первых, отметим, что норма (на P) оператора $P_{12\ldots n}$ удовлетворяет неравенству: $|P_{12\ldots n}|_P \leqslant 1/\alpha$ при любом n, так как $\rho(S_{12\ldots n}; P^{12\ldots n}) \geqslant \alpha$. С другой стороны, если $z \in P_{12\ldots m}$, то $P_{12\ldots n}(z) = z$ при $n \geqslant m$, поэтому последовательность $P_{12\ldots n}(z)$ сходится к z на множестве, плотном в P, а значит, $\lim_{n\to\infty} \sum_1^n P_i(z) = \lim_{n\to\infty} P_{12\ldots n}(z) = z$ всюду на P.

Необходимость. Если для любого $z \in P$ последовательность $P_{12\ldots n}(z)$ сходится, то существует такая константа M, что $|P_{12\ldots n}|_P \leqslant M$ при любом n, откуда и следует, что $\rho(S_{12\ldots n}; P^{12\ldots n}) \geqslant 1/M$.

Пусть $\{P_n\}$ — (β)-последовательность.

B_1. Пусть $n_1 < n_2 < \ldots$ — бесконечная последовательность индексов. Совершая предельный переход, получаем: $\rho(S_{n_1 n_2 \ldots}; P^{n_1 n_2 \ldots}) \geqslant \beta$. Отсюда $P = P_{n_1 n_2 \ldots} + P^{n_1 n_2 \ldots}$. Очевидно, что для всякой последовательности индексов операторы $P_{n_1 n_2 \ldots}$ и $P^{n_1 n_2 \ldots}$ линейны и не только $|P_{n_1 n_2 \ldots}|_P \leqslant 1/\beta$, но (вследствие симметрии) и $|P^{n_1 n_2 \ldots}|_P \leqslant 1/\beta$.

B_2. Пусть $z \in P$ и $\{P_n(z)\}$ — последовательность его проекций. Тогда, какова бы ни была последовательность индексов $n_1 < n_2 < \ldots$, в многообразии $P_{n_1 n_2 \ldots}$ существует такой элемент ζ, что $P_{n_k}(\zeta) = P_{n_k}(z)$ ($k = 1, 2, \ldots$). (α)-последовательность свойством B_2, вообще говоря, не обладает.

---

* В качестве α и β мы условимся брать наибольшие числа, удовлетворяющие нашим условиям.

Теорема 6. *Для того чтобы $\{P_n\}$ являлась (β)-последовательностью, необходимо и достаточно, чтобы ряд $\sum\limits_1^\infty F(P_i(z))$ абсолютно сходился для любого $F \in E^*$ и любого $z \in E$. При этом будет:*

$$\sum_1^\infty |F(P_i(z)| \leqslant \frac{4}{\beta} |F| \, \| x \|. \tag{1}$$

Доказательство. Пусть $F \in E^*$. Тогда $F(z) = f_1(z) + f_2(z)$, где f_1 и f_2—действительные, аддитивные, непрерывные функционалы, однородные относительно действительных множителей, причем, если мы введем обозначения $|f_1| = \sup\limits_{\|z\| \leqslant 1} |f_1(z)|$, $|f_2| = \sup\limits_{\|z\| \leqslant 1} |f_2(z)|$, то $|F| = |f_1| = |f_2|$ (1) и, таким образом, $|f_1(z)| \leqslant |F| \, \|z\|$ и $|f_2(z)| \leqslant \leqslant |F| \, \|z\|$. $\sum\limits_1^\infty F(P_k(z)) = \sum\limits_1^\infty f_1(P_k(z)) + i \sum\limits_1^\infty f_2(P_k(z))$. Так как для любой последовательности индексов $\left\| \sum\limits_{k=1}^\infty P_{n_k}(z) \right\| = \| P_{n_1 n_2 \ldots}(z) \| \leqslant \frac{1}{\beta} \| z \|$, то, выделяя группы индексов, при которых $f_1(P_i(z))$ и $f_2(P_i(z))$ сохраняют знак, получаем (1).

Теорема 7. *Пусть $n_1 < n_2 < \ldots < n_q$ — конечная последовательность индексов и $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_q$ — числа. Тогда: если $\{P_n\}$ — (β)-последовательность и $z_{n_k} \in P_{n_k}$, то*

$$\| \mu_1 z_{n_1} + \mu_2 z_{n_2} + \ldots + \mu_q z_{n_q} \| \leqslant \max_{i=1,2,\ldots q} |\mu_i| \frac{4}{\beta} \| z_{n_1} + z_{n_2} + \ldots + z_{n_q} \|. \tag{2}$$

Доказательство. Пусть $z = \sum\limits_{k=1}^q z_{n_k}$ и F_0 — такой линейный функционал, что $|F_0| = 1$ и $F_0\left(\sum\limits_{k=1}^q \mu_k z_{n_k}\right) = \left\| \sum\limits_{k=1}^q \mu_k z_{n_k} \right\|$. Тогда

$$\left\| \sum_{k=1}^q \mu_k z_{n_k} \right\| \leqslant \max_{1 \leqslant k \leqslant q} |\mu_k| \sum_{k=1}^q |F_0(z_{n_k})| = \max_{1 \leqslant k \leqslant q} |\mu_k| \sum_{k=1}^q |F_0(P_{n_k}(z))| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{1 \leqslant k \leqslant q} |\mu_k| \frac{4}{\beta} |F_0| \, \| z \| = \max_{1 \leqslant k \leqslant q} |\mu_k| \frac{4}{\beta} \left\| \sum_{k=1}^q z_{n_k} \right\|.$$

Замечание. Если E — регулярное пространство, то для любой бесконечной последовательности индексов и любой ограниченной последовательности чисел мы будем иметь

$$\left\| \sum_{k=1}^\infty \mu_k z_{n_k} \right\| \leqslant \sup_k |\mu_k| \left\| \sum_{k=1}^\infty z_{n_k} \right\| \tag{3}$$

в предположении, что ряд $\sum\limits_1^\infty z_{n_k}$ сходится.

Поступило
7 X 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Г. А. Сухомлинов, Матем. сб., 3 (45), 353 (1938).