Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXX, № 4

МАТЕМАТИКА

А. В. БИЦАДЗЕ

О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ СМЕШАННОГО ТИПА

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 25 XI 1949)

В статье [1] дан предложенный акад. М. А. Лаврентьевым весьма простой метод решения ряда задач, связанных с уравнением смешанного типа

$$u_{xx} + \theta(y) u_{yy} = 0, \tag{1}$$

где $\theta(y) = 1$ при $y > 0$ и $\theta(y) = -1$ при $y < 0$.

В настоящей статье мы даем эффективное решение уже разобранных в [1] задач для области частного вида и изучаем еще одну новую задачу.

§ 1. Пусть D — область, ограниченная характеристиками L_1, L_2 уравнения (1), выходящими из точки $C(^1/_2, -^1/_2)$, и полуокружностью L:

$$x^2 + y^2 - x = 0, \tag{2}$$

расположенной в верхней полуплоскости. Пусть, кроме того, дано конечное множество точек $\{E_k(a_k, 0)\}$ отрезка $A(0,0)$ $B(1,0)$: $0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n < 1$. Обозначим через $A_k(^1/_2 a_k, -^1/_2 a_k)$, $B_k[^1/_2(a_k+1), ^1/_2(a_k-1)]$, $a_0 = 0$, $a_{n+1} = 1$, точки, лежащие на L_1 и L_2.

Правильным в области D решением уравнения (1) назовем такое его решение $u(x, y)$, которое непрерывно в замкнутой области $\overline{D}$ и имеет первые производные, непрерывные в этой же области всюду, кроме, может быть, отрезков E_kA_k, E_kB_k характеристик уравнения (1) и точек A, B, причем предполагается, что u_x и u_y могут обращаться в бесконечность порядка ниже 1 на упомянутых отрезках и при $x \to 0$ или $x \to 1$.

Задача T_1. Найти правильное в области D решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям:

$$u = \varphi \quad \text{на } L, \tag{3}$$

$$u = \varphi_k \text{ на } A_k A_{k+1} \text{ при четных } k, \; u = \varphi_k \text{ на } B_k B_{k+} \text{ при нечетных } k, \tag{4}$$

где φ, φ_k — заданные дважды непрерывно дифференцируемые функции.

Задача будет полностью решена, если нам удастся определить функции $\tau(x) = u(x, 0)$ и $\nu(x) = u_y(x, 0)$, $0 \leqslant x \leqslant 1$.

В гиперболической части области D функция $u(x, y)$ будет иметь вид:

$$2u(x, y) = \tau(x+y) + \tau(x-y) - \int_{x+y}^{x-y} \nu(t)\, dt. \tag{5}$$

В силу (4) из (5) получим *

* Согласно (3) и (6), в самом общем случае, задача T_1 сводится к задаче Римана — Гильберта [2].

$$\tau(0)+\tau(x)-\int_0^x \nu(t)\,dt = 2\varphi_{2k}\left(\frac{x}{2}\right), \quad a_{2k} \leqslant x \leqslant a_{2k+1};$$
$$\tau(1)+\tau(x)+\int_1^x \nu(t)\,dt = 2\varphi_{2k-1}\left(\frac{x+1}{2}\right), \quad a_{2k-1} \leqslant x \leqslant a_{2k}, \tag{6}$$

или, после дифференцирования,

$$\tau'(x)-\nu(x)=\varphi_{2k}'\left(\frac{x}{2}\right), \quad \tau'(x)+\nu(x)=\varphi_{2k-1}'\left(\frac{x+1}{2}\right). \tag{7}$$

Будем предполагать, что $n=2m$. Случай $n=2m-1$ исследуется аналогично.

Единственность решения задачи T_1 получается весьма просто. В самом деле, пусть $u_0(x, y)$ — решение однородной задачи T_1. В силу (3) и (4) имеем: $u_0=0$ на L, $u_0\ (a_k, 0)=0$. Но гармоническая в эллиптической части области D функция u_0, согласно (7), не может иметь на AB ни положительного максимума, ни отрицательного минимума, т. е. $u_0(x, y)\equiv 0$.

Не нарушая общности, мы будем предполагать, что

$$\varphi(A)=\varphi_0{}'(A)=\varphi'(A)=\varphi(B)=\varphi'(B)=0. \tag{8}$$

Применяя формулу Грина, из эллиптической части области D получим

$$\tau(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^1 [\lg|x-t| - \lg|2x-1|(x_1-t)]\,\nu(t)\,dt + f(x), \tag{9}$$

где

$$x_1=\frac{x}{2x-1}, \quad f(x)=\frac{1}{\pi}\int_L \varphi \frac{\partial g(x;\,\xi,\,\eta)}{\partial n}\,ds, \tag{10}$$

а $g(x;\ \xi,\ \eta)$ есть гармоническая функция Грина для круга (2) с полюсом в точке $(x, 0)$. Принимая во внимание (8) и (10), нетрудно доказать, что производные до второго порядка аналитической в интервале $(0, 1)$ функции $f(x)$ остаются конечными при $x\to 0$ или $x\to 1$, причем $f(0+)=f(1-)$.

Предполагая, что $\nu(x)$ удовлетворяет условию Гельдера внутри интервала $(0, 1)$, в результате исключения $\tau(x)$ из (7) и (9) получаем сингулярное интегральное уравнение

$$\alpha(x)\,\nu(x)+\frac{1}{\pi}\int_0^1\left(\frac{1}{t-x}+\frac{1-2t}{t+x-2xt}\right)\nu(t)\,dt = F(x), \tag{11}$$

где $\alpha=1$ при $a_{2k}<x<a_{2k+1}$, $\alpha=-1$ при $a_{2k-1}<x<a_{2k}$, а $F(x)=$ $=f'(x)-\varphi_{2k}'(^1/_2 x)$ при $a_{2k}<x<a_{2k+1}$, $F(x)=f'(x)-\varphi_{2k-1}'(^1/_2 x+{}^1/_2)$ при $a_{2k-1}<x<a_{2k}$.

Для изучения интегрального уравнения (11) рассмотрим функцию

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_0^1\left(\frac{1}{t-z}+\frac{1-2t}{t+z-2tz}\right)\nu(t)\,dt, \tag{12}$$

голоморфную вне действительной оси и исчезающую при $z\to\infty$.

Обозначим через $\Phi^+(x)$ и $\Phi^-(x)$ предельные значения (12) на действительной оси соответственно из верхней и из нижней полуплоскости. Применяя известные формулы Племеля — Привалова, уравнение (11) приведем к эквивалентной краевой задаче Гильберта ([2], [3])

$$\Phi^+(x) + G(x)\,\Phi^-(x) = h(x), \tag{13}$$

где $G = -i$ в интервалах $(a_{2k-1},\ a_{2k})$, $(b_{2k+1},\ b_{2k})$, $(-\infty,\ b_{2j})$, $(b_{2j+1},\ \infty)$; $G = i$ в $(a_{2k},\ a_{2k+1})$, $(b_{2k},\ b_{2k+1})$; $2h(x) = (1-i)\,F(x)$ в $(a_{2k},\ a_{2k+1})$; $2h(x) = -(i+1)\,F(x)$ в $(a_{2k-1},\ a_{2k})$; $2(2x-1)^2\,h(x) = -(1+i)\,F(x_1)$ в $(b_{2k+1},\ b_{2k})$, $(-\infty,\ b_{2j})$, $(b_{2j+1},\ \infty)$; $2(2x-1)^2\,h(x) = (1-i)F(x_1)$ в $(b_{2k},\ b_{2k-1})$; здесь $b_k = a_k : (2a_k - 1)$, и подразумевается, что $a_{2j} < {}^1/_2 < a_{2j+1}$.

Имея решение задачи (13) (см. ([2])), формула $\nu(x) = \Phi^+(x) - \Phi^-(x)$ даст нам искомое решение

$$\nu(x) = \pm F(x) \mp \Pi(x) \sum_{0}^{2m} \int_{a_j}^{a_{j+1}} \frac{(-1)^j}{\Pi(t)} \left(\frac{1}{t-x} + \frac{1-2t}{t+x-2xt} \right) F(t)\,dt, \tag{14}$$

где

$$\Pi(x) = \left| x \prod_{1}^{m} (b_{2k} - x)(a_{2k} - x) : (1-x) \prod_{1}^{m} (b_{2k-1} - x)(a_{2k} - x) \right|^{1/2}.$$

Знак $+$ берется при $a_{2k} < x < a_{2k+1}$, а знак $-$ при $a_{2k-1} < x < a_{2k}$; везде берется положительное значение радикала.

При $n = 0$ мы получаем задачу Трикоми. В этом случае $\alpha(x) \equiv 1$, $0 < x < 1$, и решение уравнения (11) дается формулой

$$\nu(x) = \frac{1}{2} F(x) - \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \sqrt{\frac{x(1-t)}{t(1-x)}} \left(\frac{1}{t-x} + \frac{1-2t}{t+x-2xt} \right) F(t)\,dt. \tag{15}$$

§ 2. Пусть $E(h, 0)$, $0 < h < 1$, — точка отрезка AB. Характеристики уравнения (1), выходящие из точки E, пересекаются с L_1 и L_2 в точках $F({}^1/_2 h, -{}^1/_2 h)$ и $G({}^1/_2 h + {}^1/_2,\ {}^1/_2 h - {}^1/_2)$. Пусть $H(1-l, -l)$, $1 - h \leqslant 2l \leqslant 1$, точка линии L_2. Соединим точки F и H линией $y = -\gamma(x)$, $h \leqslant 2x \leqslant 2(1-l)$, где $\gamma(x)$ — однозначная дважды непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая условию $-1 < \gamma' < 1$. Обозначим через $\bar{L}$ кривую: $y = -x$ при $0 \leqslant 2x \leqslant h$, $y = -\gamma(x)$ при $h \leqslant 2x \leqslant 2(1-l)$.

Задача T_2. Требуется найти функцию $u(x, y)$ со следующими свойствами: 1) $u(x, y)$ есть решение уравнения (1) в области D при $y \neq 0$; 2) она непрерывна в замкнутой области $\bar{D}$ и имеет первые производные, непрерывные в этой же области всюду, кроме, быть может, точки B, причем u_x и u_y могут обращаться в бесконечность порядка ниже 1 при $x \to 1$; 3) на линиях L и $\bar{L}$ она принимает заданные значения:

$$u = \varphi \text{ на } L, \quad u = \varphi^* \text{ на } \bar{L}, \quad \varphi(A) = \varphi^*(A), \tag{16}$$

где φ — дважды непрерывно дифференцируемая функция, а функции $\varphi_1(x) = \varphi^*$, $0 \leqslant 2x \leqslant h$; $\varphi_2(x) = \varphi^*$, $h \leqslant 2x \leqslant 2(1-l)$, таковы, что функция

$$\varphi_0 = 2\varphi_1({}^1/_2 x), \quad 0 \leqslant x \leqslant h;$$

$$\varphi_0 = 2\varphi_2[\delta(x)] - 2\varphi_1[{}^1/_2\delta(x) - {}^1/_2\gamma(\delta(x))], \quad h \leqslant x \leqslant 1, \tag{17}$$

где δ выражает ξ как функцию η из уравнения $\xi + \gamma(\xi) = \eta$, $h \leqslant 2\xi \leqslant 2(1-l)$, $h \leqslant \eta \leqslant 1$, непрерывна на сегменте $[0, 1]$ вместе со своими производными до второго порядка.

Нетрудно вывести соотношения, связывающие $\tau = u(x, 0)$ и $\nu = u_y(x, 0)$. В самом деле, искомое решение в треугольнике AFE представляется в виде $u = \tau(x+y) - \varphi_1[{}^1/_2(x+y)] + \varphi_1[{}^1/_2(x-y)]$, откуда

$$\tau'(x) - \nu(x) = \varphi_0'(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant h. \tag{18}$$

В области $FEGC$ имеем

$$\begin{gathered} u(x, y) = \tau(x+y) - \varphi_1[{}^1/_2(x+y)] + \varphi_2[\delta(x-y)] - \\ - \tau[\delta(x-y) - \gamma(\delta(x-y))] + \varphi_1[{}^1/_2\delta(x-y) - {}^1/_2\gamma(\delta(x-y))], \end{gathered} \tag{19}$$

а в треугольнике EGB функция $u(x, y)$ дается по формуле (5).

Приравнивая (5) и (19) вдоль EG и дифференцируя полученное равенство по x, будем иметь

$$\begin{gathered} \tau'(x) - \nu(x) = 2\{\varphi_2[\delta(x)] - \tau[\delta(x) - \gamma(\delta(x))] + \\ + \varphi_1[{}^1/_2\delta(x) - {}^1/_2\gamma(\delta(x))]\}'_x. \end{gathered} \tag{20}$$

После исключения $\tau(x)$ из соотношений (9), (18) и (20) мы получаем функциональное уравнение

$$\nu(x) + \frac{1}{\pi}\int_0^1 \left(\frac{1}{t-x} + \frac{1-2t}{t+x-2xt}\right)\nu(t)\,dt = F(x), \tag{21}$$

где

$$\begin{gathered} F(x) = f'(x) - \varphi_0'(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant h; \\ F(x) = f'(x) - \varphi_0'(x) + 2\nu[\delta(x) - \gamma(\delta(x))][\delta'(x) - \gamma'_x(\delta(x))], \\ h \leqslant x \leqslant 1. \end{gathered} \tag{22}$$

Применяя формулу обращения (15), перепишем (21) в виде

$$\begin{gathered} \nu(x) + \frac{1}{\pi}\int_h^1 \sqrt{\frac{x(1-t)}{t(1-x)}}\left(\frac{1}{t-x} + \frac{1-2t}{t+x-2xt}\right) \times \\ \times \frac{1-\gamma'(\delta(t))}{1+\gamma'(\delta t))}\nu[\delta(t) - \gamma(\delta(t))]\,dt = F_0(x), \end{gathered} \tag{23}$$

где $F_0(x)$ совпадает с правой частью (15) при $F = f'(x) - \varphi'_0(x)$. Функцию $F_0(x)$ можно представить в виде $\sqrt{x}\,\Omega(x)$.

Естественно искать $\nu(x)$, $0 < x < 1-2l$, в виде $\nu = \sqrt{x}\,\mu(x)$, где $\mu(x)$ — непрерывная функция. Совершая замену переменного $\delta(t) - \gamma(\delta(t)) = \xi$, $t = \omega(\xi)$ в (23), для определения μ получим интегральное уравнение Фредгольма с неотрицательным ядром:

$$\mu(x) + \frac{1}{\pi}\int_0^{1-2l} \sqrt{\frac{\xi(1-\omega)}{\omega(1-x)}}\left(\frac{1}{\omega-x} + \frac{1-2\omega}{x+\omega-2\omega x}\right)\mu(\xi)\,d\xi = F_0(x). \tag{24}$$

Если ядро уравнения (24) удовлетворяет условию $K(x, \xi) \leqslant p < 1$, то это уравнение всегда имеет одно и только одно решение. В частности, это будет иметь место при

$$1 - 2h \leqslant \gamma' < 1, \quad h < \pi(1-h)^2. \tag{25}$$

Таким образом, при соблюдении условий (25) задача T_2 всегда имеет одно и только одно решение.

Поступило
26 XI 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. А. Лаврентьев и А. В. Бицадзе, ДАН, 70, № 3 (1950).
[2] Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные интегральные уравнения, 1946.
[3] С. Г. Михлин, ДАН, 59, № 6 (1948).