Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXX, № 4

МАТЕМАТИКА

Член-корреспондент АН СССР А. Д. АЛЕКСАНДРОВ

КВАЗИГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ НА МНОГООБРАЗИЯХ, ГОМЕОМОРФНЫХ СФЕРЕ

1. В данной статье рассматриваются многообразия ограниченной кривизны в смысле определения, данного в ([1]). Понятие квазигеодезической в таком многообразии было введено в ([2]). Сущность его состоит в том, что квазигеодезическая есть кривая, у которой „поворот на обе стороны всегда одного знака". Напомним точное определение.

Пусть L — кривая в каком-либо многообразии R. Пусть $\tau_r(l)$, $\tau_l(l)$ — правый и левый повороты ее дуги l. Определим число $\varphi(l)$ по правилу: $\varphi(l) = \min(|\tau_r(l)|, |\tau_l(l)|)$, если $\tau_r(l)$, $\tau_l(l)$ разных знаков, и $\varphi(l) = 0$ в противном случае. Разбиваем кривую L на дуги l_i и образуем сумму $\sum \varphi(l_i)$. Полным собственным поворотом σ кривой L мы называем наибольший предел таких сумм при безграничном измельчании разбиения *.

Квазигеодезической мы называем кривую, полный собственный поворот которой равен нулю.

Всякая геодезическая, т. е. кривая, кратчайшая на каждом достаточно малом отрезке, является квазигеодезической. Обратное справедливо, вообще говоря, только в многообразиях, у которых удельная кривизна, т. е. отношение кривизны области к ее площади, ограничено сверху.

2. Целью данной статьи является обобщение двух известных теорем о геодезических на римановых многообразиях, гомеоморфных сфере. Первая — теорема Люстерника — Шнирельмана о трех замкнутых геодезических, вторая — теорема Морса о существовании для любой пары точек бесконечного числа соединяющих их геодезических ([3],[4]). Соответствующие обобщенные теоремы гласят **:

Теорема 1. *На всяком гомеоморфном сфере многообразии ограниченной кривизны существуют три замкнутые квазигеодезические без самопересечений, при этом либо есть три таких квазигеодезических с разными длинами, либо существует целое семейство их, покрывающее все многообразие.*

---

* В ([2]) указаны также другие эквивалентные определения собственного поворота, например: $\sigma = \tau_r^+ + \tau_l^+ - \omega^+ = \tau_r^- + \tau_l^- - \omega^-$, где $\tau_r^+, \ldots, \omega^-$ соответственно положительные и отрицательные части правого и левого поворотов и кривизны кривой L (с исключением концов). Из данной формулы видно, что σ действительно есть та часть поворота, которая не вызвана наличием у кривой (как множества точек) кривизны.

** Для общих замкнутых выпуклых поверхностей они были высказаны мною в ([5]); доказательство первой для этого случая дано А. В. Погореловым ([6]).

(Отсутствие самопересечений не означает отсутствия кратных точек; оно означает лишь, что в кратной точке кривая не переходит с одной стороны ее дуги на другую. Квазигеодезическая может касаться сама себя, или даже налегать сама на себя на целых отрезках. Пример замкнутой квазигеодезической, налегающей самое на себя, представляет ребро правильного тетраэдра.)

Теорема 2. *На всяком гомеоморфном сфере многообразии ограниченной кривизны каждые две точки соединимы бесконечным числом квазигеодезических, и каждая точка является вершиной бесконечного числа квазигеодезических петель* (что соответствует случаю, когда две точки, соединяемые квазигеодезическими, сливаются в одну).

3. Доказательство обеих теорем осуществляется путем предельного перехода от римановых многообразий, причем используется „правильная" сходимость метрик.

Мы представляем себе метрики заданными на одной и той же (топологической) сфере. Согласно определению, введенному в [2], метрики ρ_n правильно сходятся к ρ, если, во-первых, сходимость их равномерна, а во-вторых, положительные и отрицательные части кривизн метрик ρ_n слабо сходятся, соответственно, к положительной и отрицательной частям кривизны метрики ρ.

Имеют место две теоремы:

Теорема А. *Для всякой метрики ограниченной кривизны существует последовательность правильно сходящихся к ней римановых метрик.*

Теорема В. *Если метрики ρ_n правильно сходятся к ρ и кривые L_n, являющиеся квазигеодезическими в метриках ρ_n, сходятся к кривой L, то L есть квазигеодезическая в метрике ρ и длины кривых L_n сходятся к длине кривой L.*

Доказательство этих теорем не может быть дано в рамках данной статьи, но с их помощью теоремы 1 и 2 получаются уже достаточно просто.

4. Докажем теорему 1 о трех квазигеодезических.

Пусть на топологической сфере задана метрика ρ ограниченной кривизны и пусть римановы метрики ρ_n правильно сходятся к ρ. Согласно теореме Люстерника — Шнирельмана, в каждой метрике ρ_n существуют три замкнутые геодезические без кратных точек. По теореме В пределами этих геодезических будут квазигеодезические, которые, как пределы кривых без кратных точек, не имеют самопересечений. Однако в пределе эти геодезические могут, априори, сливаться, и тогда мы не получаем в метрике ρ трех замкнутых квазигеодезических. Все доказательство и состоит, по существу, в преодолении этого затруднения, что достигается на основе „теоремы о неустойчивости замкнутых геодезических", представляющей, при всей ее простоте, самостоятельный интерес.

5. Для формулировки этой теоремы вспомним, что каждая из трех замкнутых геодезических получается у Л. А. Люстерника и Л. Г. Шнирельмана [3] как кривая, дающая критическое значение длины — минимум максимумов длин замкнутых кривых, образующих семейства категорий 2, 3 или 4. Обозначим эти критические значения через c_2, c_3, c_4; очевидно, $c_2 \leqslant c_3 \leqslant c_4$. Здесь и дальше речь идет о римановой метрике, заданной на сфере R.

Теорема 3 (о неустойчивости). *Если разность $c_{k+1} - c_k$ мала, то, какую точку A ни задать, малым изменением метрики в некоторой малой окрестности U точки A можно добиться того, чтобы замкнутая геодезическая, отвечающая значению c_k, стала проходить через U.*

В точной формулировке:

Пусть $\delta = c_{k+1} - c_k$ и ε — произвольно малое > 0 ($3\varepsilon \leqslant c_k - \delta$). Пусть $U \supset V$ — геодезические круги с общим центром A. Изменяем метрику в U, оставляя ее неизменной в $R - U$, причем изменение состоит в уменьшении линейного элемента ds. Если при этом можно добиться того, чтобы всякая кривая, пересекающая V и имеющая длину $\geqslant c_k - \varepsilon$, укорачивалась не менее, чем на $\delta + \varepsilon$, то критическое значение c_k изменяется, и соответствующая ему замкнутая геодезическая будет пересекать круг U.

(Указанное изменение метрики заведомо возможно, если радиус $U > \delta + 4\varepsilon$ и радиус $V < \varepsilon$. Именно, в круге W радиуса $\delta + 3\varepsilon$ линейный элемент можно уменьшить в $\frac{\varepsilon}{\delta + 2\varepsilon}$ раз, а в кольце $U - W$ гладко соединить этот измененный линейный элемент с данным на границе U, пользуясь, например, тем, что с уменьшением гауссовой кривизны линейный элемент в полярных координатах быстрее растет с радиусом.)

Доказательство. Если после указанного изменения метрики число c_k изменится, приняв значение c'_k, то получим замкнутую геодезическую длины c'_k, которая необходимо проходит через U, так как вне U метрика вовсе не меняется.

Допустим, что c_k сохранило свое значение: $c'_k = c_k$. По определению числа c_{k+1} существует нормальное семейство B категории $k+1$, максимум длин в котором $< c_{k+1} + \varepsilon/2$. Разобьем это семейство на два: B_1 из кривых, не имеющих общих точек с V, и B_2 из остальных кривых. (Собственно говоря, речь идет о замыканиях этих семейств.)

Так как B_1 не покрывает целую область, то $\operatorname{cat} B_1 = 1$. С другой стороны, кривые семейства B_2 имеют общие точки с V, а потому при указанном в теореме изменении метрики каждая такая кривая или имеет длину $\leqslant c_k - \varepsilon$, или укорачивается не менее чем на величину $(c_{k+1} - c_k) + \varepsilon$. Поэтому в измененной метрике длины кривых семейства B_2 будут меньше, чем $(c_{k+1} + \varepsilon/2) - (c_{k+1} - c_k + \varepsilon) = c_k - \varepsilon/2 = c'_k - \varepsilon/2$. Но так как c'_k есть минимум максимумов длин в семействах категории k, то $\operatorname{cat} B_2 < k$.

Итак, семейство B слагается из семейств B_1 и B_2, категории которых не превосходят, соответственно, 1 и $k-1$. Поэтому $\operatorname{cat} B \leqslant k$. Это противоречит самому выбору семейства B. Следовательно, допущение, что $c'_k = c_k$, неверно, и теорема доказана.

6. Возвращаемся к доказательству теоремы 1. Пусть римановы метрики ρ_n правильно сходятся к данной метрике ρ, но критические значения c^n_k, c^n_{k+1}, отвечающие этим метрикам, сходятся к общему пределу. Тогда при больших n они отличаются мало, и, пользуясь теоремой о неустойчивости, мы сможем малым изменением метрик ρ_n получить замкнутые геодезические, проходящие вблизи заданной точки. В пределе они дадут квазигеодезическую, проходимую вблизи этой точки. Но так как эта „близость" к данной точке произвольна, то оказывается, что в метрике ρ через каждую точку проходит замкнутая квазигеодезическая, и теорема 1 доказана.

7. Теорема 2 непосредственно выводится из теоремы Морса.

Пусть на топологической сфере задана метрика ρ ограниченной кривизны и пусть римановы метрики ρ_n правильно сходятся к ρ. Согласно теореме Морса, геодезические в метрике ρ_n, соединяющие две данные точки A, B, образуют последовательность с бесконечно возрастающими длинами.

Нетрудно, вместе с тем, убедиться, что длины геодезических данного номера равномерно ограничены при всех n. Поэтому можно будет образовать сходящиеся последовательности из геодезических (хотя бы и разных номеров) так, чтобы их пределы давали целую последовательность квазигеодезических бесконечно возрастающих длин.

Математический институт
им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР
Ленинградское отделение

Поступило
6 XII 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Д. Александров, ДАН, 60, № 9 (1948). [2] А. Д. Александров. ДАН, 69, № 6 (1949). [3] Л. А. Люстерник и Л. Г. Шнирельман, Усп. матем. наук, 2, в. 1 (1947). [4] Г. Зейферт и В. Трельфалль, Вариационное исчисление в целом, 1947. [5] А. Д. Александров, ДАН, 47, 319 (1945). [6] А. В. Погорелов, Матем. сборн., 25 (67) : 2 (1949).