Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXX, № 3

ЭЛЕКТРОТЕХНИКА

А. Г. ЛУНЦ

ПРИЛОЖЕНИЕ МАТРИЧНОЙ БУЛЕВСКОЙ АЛГЕБРЫ К АНАЛИЗУ И СИНТЕЗУ РЕЛЕЙНО-КОНТАКТНЫХ СХЕМ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 30 XI 1949)

В последнее время для анализа и синтеза релейно-контактных электрических схем параллельно-последовательного соединения с успехом используется аппарат булевской алгебры ([1-3]). Но этого аппарата оказывается недостаточно для теории схем общего типа, а также для теории многополюсных схем. В настоящей статье предлагается для исследований такого рода использовать матричную булевскую алгебру и описывается ряд результатов, полученных в этом направлении.

§ 1. Матричная булевская алгебра

Пусть $\mathfrak{A}$ есть некоторая булевская алгебра ([1]). Будем рассматривать матрицы с элементами из $\mathfrak{A}$. Как и для обычных матриц (с элементами из поля), для матриц с элементами из $\mathfrak{A}$ можно ввести операции сложения и умножения, которые мы будем записывать: $A+B$, $A\times B$. При этом также будут иметь место ассоциативные, коммутативный (для сложения) и дистрибутивный законы.

Введем понятие «определителя» квадратной матрицы с элементами из $\mathfrak{A}$, как суммы $n!$ слагаемых, составленных таким же образом, как и в обычном определителе n-го порядка. Такие определители будут обладать рядом свойств, аналогичных свойствам обычных определителей.

Для пары матриц с элементами из $\mathfrak{A}$ мы введем еще операцию «булевского умножения», обозначив ее $A\cdot B=C$ и определив элементы матрицы C через элементы матриц A и B следующим образом:

$$c_{\alpha,\beta}=a_{\alpha,\beta}b_{\alpha,\beta}$$

для всех индексов α и β.

Квадратную матрицу с элементами из $\mathfrak{A}$, по главной диагонали которой стоят единицы, будем называть «булевской», а множество булевских матриц n-го порядка с элементами из $\mathfrak{A}$ обозначать $\mathfrak{A}_n$ и называть матричной булевской алгеброй. Множество $\mathfrak{A}_n$ и в самом деле является булевской алгеброй относительно операций сложения и булевского умножения. В дальнейшем только о матрицах из $\mathfrak{A}_n$ и будет итти речь.

§ 2. Многополюсники

Каждую релейно-контактную схему (или часть схемы) можно задать, указав непосредственную проводимость между ее узловыми точками. Поэтому на исследуемой электрической схеме выберем n точек (полюсов) M_1, $M_2, \ldots, M_n$ и будем изучать схему относительно этих точек. Обозначим непосредственную проводимость от полюса

M_α к полюсу M_β через $a_{\alpha,\beta}(\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n)$. $a_{\alpha,\beta}$ есть сумма проводимостей всевозможных элементарных цепей схемы, идущих от полюса M_α к полюсу M_β, минуя остальные полюса. Естественно положить $a_{\alpha,\alpha} = 1$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, n)$. Эти n^2 величин запишем в виде булевской матрицы:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11}\, a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\, a_{n2} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Если в электрической схеме отсутствуют вентильные элементы, то матрица A будет симметрической. Как мы уже сказали, матрица A в некотором отношении характеризует строение электрической схемы. Всякую электрическую схему с n выбранными и перенумерованными полюсами, непосредственные проводимости между которыми образуют матрицу A, будем называть „n-полюсником A".

Обозначим через $\chi_{\alpha,\beta}(A)$ полную проводимость от полюса M_α к полюсу M_β. Таким образом, $\chi_{\alpha,\beta}(A)$ есть сумма проводимостей всех элементарных цепей в схеме, идущих от полюса M_α к полюсу M_β. n^2 величин $\chi_{\alpha,\beta}(A)$ $(\alpha, \beta = 1, 2, \ldots n)$ образуют булевскую матрицу

$$\chi(A) = \begin{vmatrix} \chi_{11}(A)\ \chi_{12}(A) \ldots \chi_{1n}(A) \\ \chi_{21}(A)\ \chi_{22}(A) \ldots \chi_{2n}(A) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \chi_{n1}(A)\ \chi_{n2}(A) \ldots \chi_{nn}(A) \end{vmatrix}.$$

Эта матрица в известном смысле характеризует работу n-полюсника A.

Пусть, например, часть некоторой электрической схемы относительно точек соприкосновения этой части с другими частями схемы представляет собой n-полюсник A. Тогда, не нарушая работы схемы в целом, мы можем n-полюсник A заменить другим n-полюсником B, лишь бы $\chi(A) = \chi(B)$.

Матрицу $\chi(A)$ мы назовем характеристикой многополюсника A, а два многополюсника A и B с одинаковыми характеристиками $\chi(A) = \chi(B)$ эквивалентными, записывая это: $A \sim B$.

Возникает две задачи:

1) Анализ многополюсника: определить характеристику $\chi(A)$ заданного многополюсника A.

2) Синтез многополюсника: найти многополюсники A, имеющие заданную характеристику $\chi(A)$ (на практике желательно бывает, чтобы в многополюснике A использовалось возможно меньшее число контактов).

§ 3. Анализ многополюсника

Задача анализа многополюсника имеет довольно простое решение. Оказывается, характеристика $\chi(A)$ есть не что иное как матрица, взаимная к A, т. е. матрица, составленная из миноров матрицы A. Так что

$$\chi_{\alpha,\beta}(A) = A_{\beta,\alpha}.$$

Можно предложить еще и другое решение. Степени матрицы A (в обычном матричном смысле) как элементы булевской алгебры $\mathfrak{A}_n$ образуют цепь неравенств вида:

$$A < A^2 < A^3 < \ldots < A^r = A^{r+1} = \ldots,$$

и все A^k, начиная с некоторого $r\,(k \geqslant r)$, равны $\chi(A)$, причем всегда $r < n$. Отсюда следует второй способ анализа многополюсника.

§ 4. Синтез многополюсника

Задача синтеза многополюсников значительно труднее задачи анализа. В этом направлении можно указать способы, как, зная одно или несколько решений, получить другие решения. Заметим, что заданная характеристика $\chi(A)$ сама является одним из решений задачи, а эквивалентные ей матрицы дают остальные решения.

Пусть A есть одно из решений, а X и Y — две (тоже булевские) матрицы, удовлетворяющие неравенствам

$$\chi(X) \leqslant \chi(Y) \leqslant \chi(A),$$

что равносильно таким двум:

$$X \leqslant \chi(Y), \quad Y \leqslant \chi(A);$$

тогда $A\overline{X} + Y$ (где $\overline{X}$ — элемент $\mathfrak{A}_n$, инверсный к X) тоже является решением, т. е. $A\overline{X} + Y \sim A$.

Можно, например, положить $X = Y^2$, или $X = Y^3$, или, наконец, $X = \chi(Y)$.

Если A — одно из решений, то всякая матрица B, удовлетворяющая неравенствам $A \leqslant B \leqslant \chi(A)$, также является решением.

В заключение укажем, что класс эквивалентных между собою матриц замкнут относительно операций сложения «+» и умножения «×» т. е. если A и B принадлежат к одному классу эквивалентных матриц ($A \sim B$), то и $A + B$ и $A \times B$ принадлежат к тому же классу. Это дает возможность, имея несколько решений, получать другие решения.

Поступило
19 X 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. Кутюра, Алгебра логики, 1909. [2] В. Шестакова, Автоматика и телемеханика, 2, 15 (1941). [2] М. А. Гаврилов, Электричество, 2, 54 (1946).