Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXX, № 3

АСТРОНОМИЯ

Г. Ф. ХИЛЬМИ

ТЕОРЕМА О ВИРИАЛЕ В НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКЕ

(Представлено академиком О. Ю. Шмидтом 19 XI 1948)

1. В динамике звездных систем важное значение имеет теорема о вириале. Эта теорема неоднократно применялась для решения астрономических вопросов. Теорему о вириале В. А. Амбарцумян применил к оценке массы Галактики и для вычисления времени релаксации. С. Чандрасекар использовал эту теорему в динамике звездных скоплений. Однако обычная в научной литературе трактовка и доказательство теоремы о вириале, которые можно найти в ([1], [2]), обладают недостатками и встречают серьезные возражения. Несколько иная трактовка ([3]) принципиально не отличается от обычной. Ниже мы даем критический разбор обычной трактовки теоремы о вириале и указываем формулировку, допускающую строгое доказательство.

2. Рассмотрим обычную трактовку теоремы о вириале. Пусть мы имеем n материальных точек $P_1, P_2, \ldots, P_n$ с массами $m_1, m_2, \ldots, m_n$, притягивающихся по закону Ньютона. Пусть x_i, y_i, z_i обозначают прямоугольные декартовы координаты точки P_i относительно осей с началом в центре тяжести системы точек. Через r_i обозначим расстояние точки P_i от центра тяжести, а через r_{ij} — расстояние между точками P_i и P_j.

Пусть U обозначает потенциальную функцию, а W — кинетическую энергию системы, тогда

$$U = \sum_{i,j} \frac{m_i m_j}{r_{ij}}, \tag{1}$$

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i \{x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2\}. \tag{2}$$

Нам придется, кроме того, рассматривать момент инерции системы

$$I^2 = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2. \tag{3}$$

Мы будем в дальнейшем пользоваться двумя соотношениями, вытекающими из уравнений движения: интегралом энергии

$$W = U + H \tag{4}$$

и уравнением Лагранжа — Якоби

$$\frac{d^2 I^2}{dt^2} = 2(U + 2H); \tag{5}$$

здесь H — постоянная энергии.

Систему n гравитирующих тел называют статистически стационарной, если статистическое распределение взаимных расстояний и относительных скоростей не меняется с течением времени. В этом случае все величины, зависящие только от взаимных расстояний, будут постоянными. В частности, это относится к моменту инерции системы. Но если мы положим:

$$I^2 = \text{const}, \tag{6}$$

то

$$\frac{d^2 I^2}{dt^2} = 0. \tag{7}$$

Из этого равенства и уравнения (5) Лагранжа — Якоби следует

$$U + 2H = 0. \tag{8}$$

Решая совместно уравнения (4) и (8), получим:

$$U = -2H, \qquad W = -H,$$

откуда

$$U = 2W.$$

Мы приходим к следующему предложению: *в статистически стационарных системах кинетическая и потенциальная энергия сохраняют постоянное значение, причем потенциальная энергия по абсолютной величине равна удвоенной кинетической энергии.*

Это и есть теорема о вириале в обычной трактовке. Однако эту трактовку нельзя признать удовлетворительной.

В самом деле, вопрос идет о статистическом описании механической системы, поэтому равенство (6) нельзя рассматривать как абсолютно точное. В действительности это статистическое, т. е. приближенное равенство. За исключением некоторых частных случаев, вероятность осуществления которых равна нулю и которые представляют малый интерес, момент инерции I^2 не будет строго постоянной величиной, а будет величиной, совершающей статистические колебания. Поэтому предположение о стационарности надо выражать не условием $I^2 = \text{const}$, а предположением, что можно указать положительные числа A и ε, причем $\varepsilon \ll A$, такие, что,

$$| I^2 - A | < \varepsilon$$

при всех $t \geqslant 0$. Но из этого неравенства никак не вытекает равенство (7) и дальнейшие следствия, ибо хорошо известно, что функция, сколь угодно близкая к постоянному числу, может иметь вторую производную, колеблющуюся в сколь угодно больших пределах.

3. Укажем теперь такой вариант теоремы о вириале, который свободен от указанных выше недостатков и допускает строгое доказательство.

Движение системы n тел назовем устойчивым, если при всех $t \geqslant 0$ выполняются следующие условия:

1) не происходит взаимных столкновений тел;

2) можно указать число $R > 0$ такое, что $r_i < R$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Теорема 1. *Если система n тел устойчива, то, каковы бы ни были $\varepsilon > 0$ и $T > 0$, найдется момент времени $t' > T$ такой, что*

$$| U(t') + 2H | < \varepsilon. \tag{9}$$

Интегрируя дважды равенство (5) Лагранжа — Якоби по времени в пределах от 0 до $t > 0$, получим

$$I^2 = I_0^2 + I_0^{2\prime} t + 2 \int_0^t \int_0^t (U + 2H)\, dt\, dt, \tag{10}$$

где I_0^2 и $I_0^{2'}$ обозначают значения I^2 и $I^{2'}$ в начальный момент времени $t=0$.

Доказывая теорему от противного, предположим, что можно указать $\tau>0$ такое, что ни при одном $t>\tau$ не выполняется неравенство (9). Тогда при всех $t>\tau$ выполняется одно из двух неравенств:

$$U(t)+2H\geqslant\varepsilon, \tag{11}$$

$$U(t)+2H\leqslant-\varepsilon. \tag{12}$$

Если выполняется неравенство (11), то из него и из равенства (10) следует, что при всех $t>\tau$

$$I^2\geqslant I_0^2+I_0^{2'}t+\varepsilon t^2,$$

но тогда $I^2\to\infty$ при $t\to\infty$, и, следовательно, неограниченно растет по крайней мере одно из расстояний r_i, что противоречит второму условию устойчивости.

Если выполняется неравенство (12), то из него и равенства (10) следует, что при всех $t>\tau$

$$I^2\leqslant I_0^2+I_0^{2'}t-\varepsilon t^2.$$

Правая часть этого неравенства стремится к $-\infty$ при $t\to\infty$, и при некотором $t=t_1$ она обращается в нуль. Следовательно, или до момента t_1 были взаимные столкновения тел, или в момент времени t_1 будет $I^2=0$, т. е. произойдет одновременное столкновение всех тел. Но это противоречит первому условию устойчивости.

Теорема доказана.

Теорема 2 (о вириале). *Если система n тел устойчива и если U приблизительно постоянно, т. е. можно указать такие положительные числа A, η и T, что*

$$|\bar{U}-A|<\eta \tag{13}$$

при всех $t>T$, то при тех же значениях t будем иметь

$$|U+2H|<2\eta, \tag{14}$$

$$|2W-U|<2\eta. \tag{15}$$

В самом деле,

$$U+2H=U-A+A+2H,$$

$$|U+2H|\leqslant|A+2H|+|U-A|,$$

а тогда, в силу неравенства (13),

$$|U+2H|<|A+2H|+\eta \tag{16}$$

при всех $t>T$.

С другой стороны,

$$A+2H=A-U+U+2H,$$

$$|A+2H|\leqslant|U+2H|+|U-A|,$$

и, в силу (13),

$$|A+2H|<|U+2H|+\eta \tag{17}$$

при всех $t>T$.

Пусть ε — произвольное положительное число. Согласно теореме 1 найдется $t'<T$ такое, что

$$|U(t')+2H|<\varepsilon.$$

Тогда для момента t' неравенство (17) принимает вид:

$$| A+2H | < \eta + \varepsilon.$$

Но так как левая часть этого неравенства от времени не зависит, а ε — произвольное положительное число, то

$$| A+2H | \leqslant \eta.$$

Из этого неравенства и неравенства (16) находим, что

$$| U+2H | < 2\eta$$

при всех $t > T$. Таким образом, неравенство (14) получено. Из интеграла энергии имеем

$$H = W - U,$$
$$U + 2H = 2W - U,$$

откуда, в силу (14),

$$| 2W - U | < 2\eta$$

при всех $t > T$, т. е. показана справедливость неравенства (15). Мы видим, что при малых значениях η потенциальная энергия по абсолютной величине близка к удвоенной величине кинетической энергии.

Геофизический институт
Академии наук СССР

Поступило
4 XI 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Чандрасекар, Принципы звездной динамики, 1948. [2] П. П. Паренаго, Курс звездной астрономии, 1946. [3] К. Ф. Огородников, Усп. астр. наук, 4 (1948).