УДК 621.3.01

ЗАДАЧА ОБ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ В УЧЕБНЫХ КУРСАХ ВЫСШИХ ТЕХНИЧЕСКИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Д. В. КОМНАТНЫЙ, кандидат технических наук, доцент

Учреждение образования «Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого», Республика Беларусь

Представлен вывод замкнутой формулы для потенциала электростатического поля прямоугольной пластинки, стороны которой параллельны осям декартовой системы координат, а сама пластинка размещена в произвольном месте. Вывод осуществлен путем сведения поверхностного интеграла к интегралу по контуру пластинки. Показано, что в частном случае результат совпадает с уже известной в литературе формулой. Предлагается использовать полученную формулу в учебных курсах высших учебных заведений. С ее помощью, в частности, можно дать учащимся начальные сведения о прогрессивном численном методе граничных элементов.

Ключевые слова: электростатическое поле, равномерно заряженная пластинка, формула для потенциала поля, произвольно размещенная пластинка, расчет емкости, метод участков, изучение в высших технических учебных заведениях.

Введение

Учебные программы высших технических учебных заведений предусматривают изучение начал теории электростатического поля, главным образом, в курсе общей физики. Это объясняется тем, что даже для электротехнических специальностей раздел «теория поля» либо исключен из специальных дисциплин, либо сокращен до нескольких лекций. В связи с этим возникает проблема такого наполнения курса физики, чтобы после его изучения студент мог проводить самостоятельные расчеты имеющихся на практике объектов [1].

В курсе общей физики, как правило, рассматриваются только элементарные источники электростатического поля: точечные заряды, заряженные прямые линии и отрезки прямых, равномерно заряженные окружности [2]–[4]. Этот набор оказывается достаточным для решения многих практических задач методом эквивалентных зарядов [5]. Указанный метод имеет свои ограничения, так, с его помощью нельзя рассчитывать емкость копланарных пластин, имеющих форму прямоугольника или полученных объединением прямоугольников. В этом случае применяется метод площадок, основанный на разбиении пластинки на малые прямоугольные участки и подсчета потенциала каждого участка по формуле для потенциала поля равномерно заряженной прямоугольной пластинки, которая справедлива для находящихся в плоскости пластинки точек [6]. Знание этого метода позволит студентам электротехнических специальностей вести расчеты конденсаторов [7] и микрополосковых линий [8]. Изучив метод площадок, студенты технических вузов и курсанты институтов МЧС ознакомятся с физическими основами прогрессивного численного метода решения сложных технических задач – метода граничных элементов, на примере ясного частного случая, которым является метод участков [9]. При дальнейшей учебе и работе полученные сведения помогут учащимся быстро освоить метод граничных элементов.

Основная часть

Поскольку для применения метода участков требуется знание замкнутой формулы для потенциала электростатического поля прямоугольной равномерно заряженной пластинки, то весьма желательным является ее рассмотрение и вывод при изучении элементов электростатики.

В [6] приведен только частный случай указанной формулы, записанной при совпадении осей прямоугольной декартовой системы координат со сторонами пластинки. В [10] та же формула выведена при размещении начала координат в точке пересечения диагоналей прямоугольника. Для приложений желательна формула для потенциала произвольно расположенной пластинки, стороны которой параллельны осям координат. В настоящей статье ставится задача вывода такой формулы более оптимальным методом, который дает наиболее ясный и удобный для расчетов результат. Удовлетворяющий этим требованиям материал хорошо подходит для учебного процесса.

Рассмотрим прямоугольную равномерно заряженную пластинку *ABCD*, расположенную относительно прямоугольной декартовой системы координат (рисунок 1).

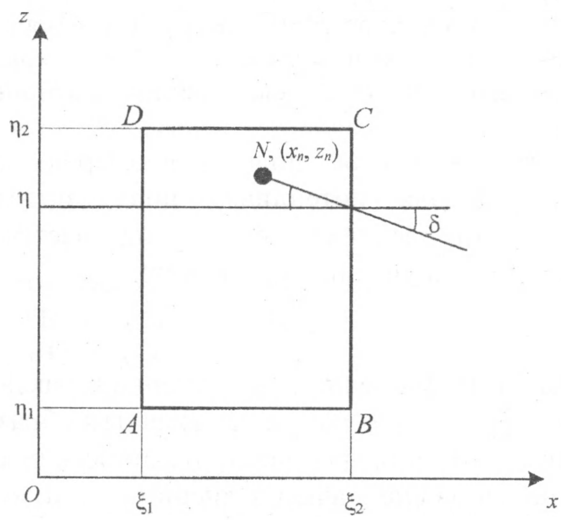

Рисунок 1 – Геометрические соотношения для вычисления контурного интеграла по стороне прямоугольника

Будем отыскивать потенциал электростатического поля пластинки в точках, принадлежащих плоскости пластинки *xOy*. В этом случае потенциал дается общей формулой

$$\varphi = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_a} \int_S \frac{d\xi d\eta}{D}, \tag{1}$$

где φ – потенциал поля, В; σ – поверхностная плотность заряда, Кл/м^2; ε_a – абсолютная диэлектрическая проницаемость среды, Ф/м^2; D – расстояние до точки наблюдения, м; ξ, η – координаты точки на поверхности пластинки, м.

В [10] показано, что с помощью формулы Грина поверхностный интеграл может быть преобразован к интегралу по контуру пластинки:

$$\varphi = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_a}\int\limits_l \cos\delta\, dl, \tag{2}$$

где dl – элемент контура, м; δ – угол между нормалью к элементу dl и направлением D, рад.

При изложении материала учащимся в лекции это преобразование допустимо привести готовым, как математический результат. В учебных же пособиях можно вынести его мелким шрифтом или провести в приложении.

Интеграл (2) разделяется на четыре интеграла по четырем сторонам прямоугольника. При вычислении контурного интеграла по стороне BC точка влияния размещается на стороне BC. Координата η точки влияния меняется от η_1 до η_2, а координата $\xi = \xi_2$. Если точка наблюдения с координатами x_n, z_n размещена так, как показано на рисунке 1, то из геометрических соображений [10]:

$$\cos\delta = \frac{\xi_2 - x_n}{D};$$

$$D = \sqrt{(\xi_2 - x_n)^2 + (\eta - z_n)^2}.$$

$$dl = d\eta$$

Тогда интеграл (2) по стороне BC имеет вид:

$$\begin{aligned} I_{BC} &= \int\limits_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{(\xi_2 - x_n)}{\sqrt{(\xi_2 - x_n)^2 + (\eta - z_n)^2}}\, d\eta = \\ &= (\xi_2 - x_n)\ln\left(\eta - z_n + \sqrt{(\xi_2 - x_n)^2 + (\eta - z_n)^2}\right)\Bigg|_{\eta_1}^{\eta_2} = \\ &= (\xi_2 - x_n)\frac{\ln\left(\eta_2 - z_n + \sqrt{(\xi_2 - x_n)^2 + (\eta_2 - z_n)^2}\right)}{\ln\left(\eta_1 - z_n + \sqrt{(\xi_2 - x_n)^2 + (\eta_1 - z_n)^2}\right)}. \end{aligned} \tag{3}$$

Аналогичные рассуждения и вычисления дают для интегралов по сторонам CD, DA и AB:

$$I_{CD} = (\eta_2 - z_n)\frac{\ln\left(\xi_2 - x_n + \sqrt{(\xi_2 - x_n)^2 + (\eta_2 - z_n)^2}\right)}{\ln\left(\xi_1 - x_n + \sqrt{(\xi_1 - x_n)^2 + (\eta_2 - z_n)^2}\right)}; \tag{4}$$

$$I_{DA} = (x_n - \xi_1)\frac{\ln\left(\eta_2 - z_n + \sqrt{(x_n - \xi_1)^2 + (\eta_2 - z_n)^2}\right)}{\ln\left(\eta_1 - z_n + \sqrt{(x_n - \xi_1)^2 + (\eta_1 - z_n)^2}\right)}; \tag{5}$$

$$I_{AB} = (z_n - \eta_1)\frac{\ln\left(\xi_2 - x_n + \sqrt{(\xi_2 - x_n)^2 + (z_n - \eta_2)^2}\right)}{\ln\left(\xi_1 - x_n + \sqrt{(\xi_1 - x_n)^2 + (z_n - \eta_2)^2}\right)}. \tag{6}$$

Следовательно, потенциал в точке наблюдения определяется по формуле

$$\varphi = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_a}\left(I_{AB} + I_{BC} + I_{CD} + I_{DA}\right). \tag{7}$$

Если начало системы координат совместить с точкой пересечения диагоналей прямоугольника, как показано на рисунке 2, и ввести обозначения $AB = 2a_1$, $BC = 2a_2$, то путем подстановки в (3)–(6) можно получить приведенную в [10] формулу для электростатического потенциала равномерно заряженной пластинки, центр которой совпадает с началом координат.

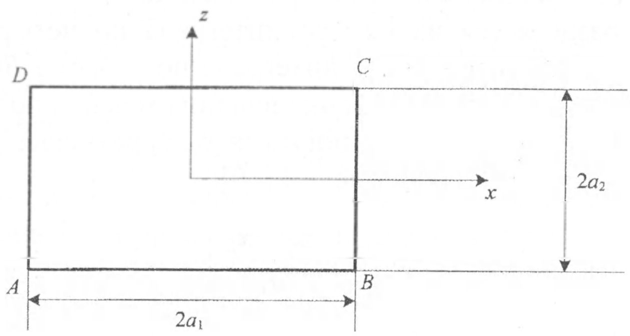

Рисунок 2 – Заряженная прямоугольная пластинка, центр которой совпадает с началом координат

В ней интегралы (3)–(6) имеют вид:

$$I_{BC} = (a_1 - x_n)\frac{\ln\left(a_2 - z_n + \sqrt{(a_1 - x_n)^2 + (a_2 - z_n)^2}\right)}{\ln\left(-a_2 - z_n + \sqrt{(a_1 - x_n)^2 + (a_2 + z_n)^2}\right)}; \tag{8}$$

$$I_{CD} = (a_2 - z_n)\frac{\ln\left(a_1 - x_n + \sqrt{(a_1 - x_n)^2 + (a_2 - z_n)^2}\right)}{\ln\left(-a_1 - x_n + \sqrt{(a_1 + x_n)^2 + (a_2 - z_n)^2}\right)}; \tag{9}$$

$$I_{DA} = (x_n + a_1)\frac{\ln\left(a_2 - z_n + \sqrt{(x_n + a_1)^2 + (a_2 - z_n)^2}\right)}{\ln\left(-a_2 - z_n + \sqrt{(x_n + a_1)^2 + (a_2 + z_n)^2}\right)}; \tag{10}$$

$$I_{AB} = (z_n + a_2)\frac{\ln\left(a_1 - x_n + \sqrt{(a_1 - x_n)^2 + (z_n + a_2)^2}\right)}{\ln\left(-a_1 - x_n + \sqrt{(a_1 + x_n)^2 + (z_n + a_2)^2}\right)}. \tag{11}$$

В [10] показано, что при вычислении потенциала по формуле (7) с интегралами (8)–(11) потенциалы угловых точек пластинки равны, как то следует и из соображений симметрии, а потенциал в центре пластинки конечен, как и должно быть по физическому смыслу задачи. Так как более общее решение, полученное в статье, в частном случае приводит к уже известным верным соотношениям, то можно считать полученное решение правильным.

Заключение

Примененный при выводе формулы (7) метод сведения поверхностного интеграла к контурному позволяет сократить объем аналитических преобразований и ограничиться четырьмя однократными интегрированиями, сводимым к табличным интегралам. В то же время прямое вычисление интеграла (1) потребует двукратного интегрирования, одно из которых выполняется по формуле интегрирования по частям [11]. Результаты вычислений в статье имеют более простую форму, чем вычисление сходного интеграла в [11], и не требуют применения обратных гиперболических функций. Следовательно, расчеты по выведенной в статье формуле требуют меньших затрат времени. Сам метод получения формулы (7) проще объяснить учащимся. Таким образом, поставленная в начале статьи задача может быть сочтена решенной.

Метод сведения двойного интеграла к контурному является полезным для студентов примером того, как знание теории интегралов позволяет решать прикладные задачи с меньшими затратами труда и времени и с низкой вероятностью ошибки. Как уже отмечалось, владение данной формулой является базой для освоения современных методов решения сложных задач.

К сожалению, в современных пособиях просматривается тенденция к исключению рассмотрения электростатического поля источников простой геометрической формы. Это приводит к обеднению учебных курсов, потере связи с практикой, что неприемлемо для технических университетов и военных инженерных вузов. Поэтому задача об электростатическом поле прямоугольной пластинки должна найти свое место в учебных курсах этих учебных заведений, в том числе и относящихся к системе МЧС Республики Беларусь.

Литература

1 Желонкина, Т. П. Использование инновационных технологий в обучении физике / Т. П. Желонкина, Е. Б. Шершнев, С. А. Лукашевич // Проблемы современного образования в техническом вузе : материалы II учеб.-метод. конф. / М-во образования Респ. Беларусь, ГГТУ им. П. О. Сухого. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2011. – С. 56–58.

2 Трофимова, Т. И. Курс физики : учеб. пособие для вузов / Т. И. Трофимова. – 11-е изд., стер. – М. : Академия, 2006. – 560 с.

3 Ерофеенко, В. Т. Основы математического моделирования / В. Т. Ерофеенко, И. С. Козловская. – Минск : БГУ, 2002. – 195 с.

4 Говорков, В. А. Электрические и магнитные поля / В. А. Говорков. – 3-е изд., перераб. и доп. – М. : Энергия, 1968. – 489 с.

5 Колечицкий, Е. С. Расчет электрических полей устройств высокого напряжения / Е. С. Колечицкий. – М. : Энергоатомиздат, 1983. – 168 с.

6 Иоссель, Ю. Я. Расчет электрической емкости / Ю. Я. Иоссель, И. С. Кочанов, М. Г. Струнский. – М. : Энергия, 1969. – 240 с.

7 Деленив, А. Н. К вопросу о погрешности метода частичных емкостей / А. Н. Деленив // Журн. техн. физики. – 1999. – Т. 69, вып. 4. – С. 8–13.

8 Sporkmann, T. The Evolution of Coplanar MMIC's ove the Past 30 Years / T. Sporkmann // Microwave Journal. – 1998. – Vol. 44, № 57. – P. 96–111.

9 Вишневский, А. М. К расчету трехмерных электрических полей / А. М. Вишневский // Электричество. – 1984. – № 8. – С. 49–52.

10 Кондратьев, Б. П. Теория потенциала. Новые методы и задачи с решениями / Б. П. Кондратьев. – М. : Мир, 2007. – 512 с.

11 Матис, И. Г. Электроемкостные преобразователи для неразрушающего контроля / И. Г. Матис. – Рига : Зинатне, 1982. – 302 с.

Поступила в редакцию 25.01.2012

D. Komnatny

THE RECTANGLE PLATE ELECTROSTATIC FIELD PROBLEM AND ITS APPLICATION IN HIGH TECHNICAL SCHOOL STUDY COURSE

The derivation of closed formula for electrostatic field potential of rectangular plate, which sides are parallel to Cartesian coordinate system and the plate is placed in arbitrary place, was produced in the article. The derivation was realized by reduction of surface integral to the circulatory integral on the plate's contour. It is shown, that in particular case the result coincides with also known from literature formulae. It is proposed to use the obtained formulae in study courses of high technical school. In particular, with the help of this formula one can give to students the elementary knowledge about progressive boundary element method.