УДК 531.3

ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ ТЯЖЕЛОЙ ТОЧКИ ПО НЕПОДВИЖНОЙ КРИВОЙ В КУРСЕ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Д.В. КОМНАТНЫЙ, кандидат технических наук

Гомельский государственный технический университет им. П.О. Сухого, г. Гомель, Республика Беларусь

В статье рассматривается использование классических задач о движении тяжелых точек по неподвижным кривым в курсе теоретической механики высших учебных заведений. Указанные задачи выбираются таким образом, чтобы при их анализе студенты усваивали и закрепляли полезные общие приемы решения задач теоретической механики. Приведены примеры задач о движении тяжелых точек, отобранных по этому принципу.

Ключевые слова: движение тяжелых точек, неподвижные кривые, теоретическая механика, инженерная подготовка офицеров спасателей, решение задач

Введение. В XVII–XIX веках, когда теоретическая механика рассматривалась, как наука математическая, большое распространение получили задачи, в которых исследовалось движение тяжелых материальных точек по неподвижным кривым, отличающимся некоторыми наперед заданными свойствами. В постановку и решение таких задач внесли значительный вклад Г. Галилей, Г. В. Лейбниц, Х. Гюйгенс, Я. и И. Бернулли, Л. Эйлер, Н. Абель и многие другие выдающиеся исследователи. Подборки созданных к началу XX века задач можно найти в фундаментальных курсах П. Аппеля [1] и Э. Рауса [2].

Когда же в начале XX столетия теоретическая механика стала наукой инженерной, интерес к описанному типу задач угас. Они стали все более исключаться из учебных пособий; им перестали уделять внимание при проведении практических занятий. Рассмотрение некоторых из этих задач сохранялось только в трудах по истории науки [3],[4].

Постановка задачи. Устоявшееся представление о том, что задачи о движении тяжелых материальных точек по специальным кривым имеют ныне только исторический интерес, представляется необоснованным. Эта оценка подтверждается следующим. Рассматриваемые задачи изучались целой плеядой великих ученых и при этом не могли не накопиться весьма примечательные результаты. В этом массиве сведений вполне возможно отыскать задачи, анализ которых в современном учебном курсе теоретической механики позволит улучшить этот курс в различных аспектах. Улучшение же преподавания теоретической механики имеет высокую актуальность для технических вузов любого профиля, поскольку эта наука является фундаментом инженерного образования. Для учебных заведений Министерства по чрезвычайным ситуациям Республики Беларусь этот вопрос имеет особую значимость, так как инженерная подготовка офицера-спасателя должна стать основой для принятия им правильных мер по предотвращению и ликвидации чрезвычайных ситуаций, угрожающих жизни и здоровью мирных граждан.

Поэтому в настоящей статье проведен анализ задач о движении тяжелых материальных точек, с целью выявить те из них, которые могут в настоящее время быть полезными в учебном процессе.

Основная часть. Среди значительного количества задач рассматриваемого типа, которые известны из указанной выше литературы, можно отобрать следующие группы.

Во-первых, задачи, при решении которых применяется общий прием, подходящий для многих задач разного типа. Таким образом, этот прием закрепляется в памяти студентов / курсантов. К этим задачам может быть отнесена задача о синхронных кривых Л. Эйлера [1]. Ее условие таково. Из точки O проведено n прямых под различными углами i к горизонтальной оси прямоугольной системы координат. В начальный момент времени под действием силы тяжести из начала координат по прямым начинают скатываться материальные точки. Требуется найти кривую, на которой эти точки находятся в произвольный момент времени. Начальная скорость всех точек равна нулю.

Для решения этой задачи рассматривается одна из прямых, заданных в условии (рисунок 1). В системе координат $x'Oy'$ координата точки выражается формулой

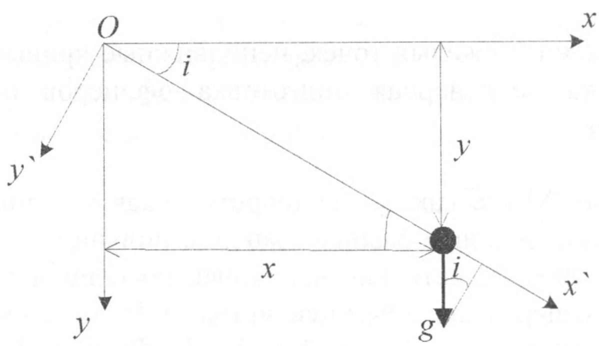

Рисунок 1 − Задача о синхронных кривых

$$x' = \frac{gt^2}{2}\sin i, \tag{1}$$

где x' – координата точки, м; g – ускорение свободного падения, м/с^2; t – время, с.

В системе координат xOy координаты материальной точки x, y имеют вид

$$\begin{aligned} x &= \frac{gt^2}{2}\sin i \cos i, \\ y &= \frac{gt^2}{2}\sin^2 i \end{aligned} \tag{2}$$

По известным формулам тригонометрии выражения (2) преобразуются к следующему виду

$$x = \frac{gt^2}{4}\sin 2i, \quad y = \frac{gt^2}{4} - \frac{gt^2}{4}\cos 2i \tag{3}$$

Тогда

$$y-\frac{gt^2}{4}=-\frac{gt^2}{4}\cos 2i \tag{4}$$

После возведения первой формулы из (3) и выражения (4) в квадрат, почленного сложения и преобразований с использованием основного тригонометрического тождества, получается уравнение вида

$$x^2+\left(y-\frac{gt^2}{4}\right)^2=\left(\frac{gt^2}{4}\right)^2 \tag{5}$$

Это уравнение окружности, центр которой имеет координаты $\left(0\,;-\frac{gt^2}{4}\right)$, а радиус равен $\frac{gt^2}{4}$. Поскольку параметры окружности не зависят от угла наклона прямой, то все заданные материальные точки в некоторый момент времени t принадлежат этой окружности, которая и является синхронной кривой.

Использованный в этой задаче прием преобразования уравнений движения с помощью основного тригонометрического тождества широко применяется в механике.

Во-вторых, могут быть выделены задачи, решение которых приводит к парадоксальному результату. В качестве примера, в статье рассматривается задача Г. Галилея [3]. Ее условие таково. Материальная точка движется без начальной скорости под действием только силы тяжести из точки A в точку B (рисунок 2). В первый раз точка движется по хорде, во второй – по дуге окружности. В каком случае точка быстрее достигнет конечного пункта?

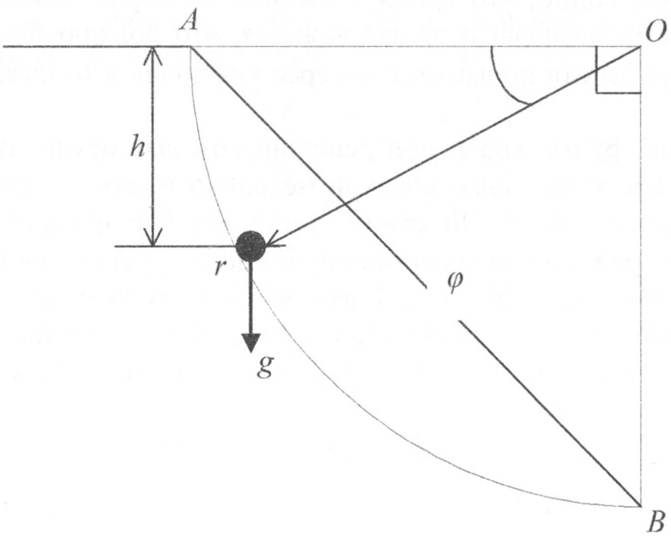

Рисунок 2 – Задача Галилея

При движении по хорде время движения вычисляется методами элементарной кинематики с учетом геометрических соотношений между длиной хорды и радиусом окружности, что приводит к выражению

$$t_x=2\sqrt{\frac{r}{g}} \tag{6}$$

где r – радиус окружности, м.

Для анализа движения по дуге окружности применяется теорема об изменении кинетической энергии материальной точки. Из этой теоремы для рассматриваемого случая получается

$$\frac{v^2}{2} = gh = gr\sin\varphi \tag{7}$$

где v – скорость материальной точки, м/с; h – расстояние до линии нулевого уровня потенциальной энергии, м; φ – угловая координата, рад.

С учетом того, что $v = r\dfrac{d\varphi}{dt}$, из (7) получается дифференциальное уравнение движения материальной точки

$$\frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{r}}\sqrt{\sin\varphi} \tag{8}$$

В уравнении (8) можно выполнить разделение переменных, что дает

$$\sqrt{\frac{r}{2g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{\sin\varphi}} = \int_0^t dt \tag{9}$$

Интеграл в левой части не берется аналитически. После его численного интегрирования получается выражение для времени движения по дуге окружности

$$t_o = 1.85\sqrt{\frac{r}{g}} \tag{10}$$

Из сравнения формул (6) и (10) видно, что время движения по хорде больше времени движения по окружности, хотя на первый взгляд кажется, что должно быть наоборот.* Задачи с подобными результатами повышают интерес учащихся к излагаемому им материалу.

В-третьих, существует большая группа задач, при решении которых осуществляется обучение применению основных теорем классической механики и математических преобразований. В эту группу входит задача Эйлера-Саладини [1]. Она формулируется следующим образом. По некоторой кривой скатывается без начальной скорости под действием только силы тяжести материальная точка. Известно, что для любой точки кривой время движения по дуге кривой равно времени движения той же материальной точки по хорде, соединяющей указанную точку кривой с началом координат (рисунок 3). Определить уравнение кривой.

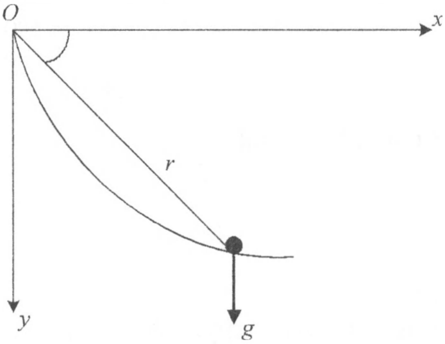

Рисунок 3 – Задача Эйлера-Саладини

* Автор считает своим долгом сообщить, что эта задача исследовалась совместно с А. Н. Дубко, бывшим доцентом кафедры «Техническая физика и теоретическая механика» Белорусского государственного университета транспорта. Он оказал автору весьма значительную помощь и поддержку.

Искомая кривая рассматривается в полярной системе координат r, φ. Для любой точки кривой время движения по хорде Or

$$t_{\text{х}} = \sqrt{\frac{2r}{g\sin\varphi}} \tag{11}$$

При движении по кривой из теоремы об изменении кинетической энергии материальной точки получается

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 2gr\sin\varphi \tag{12}$$

Откуда следует [1]

$$t_{\text{к}} = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int\frac{ds}{\sqrt{r\sin\varphi}} \tag{13}$$

где s – дуговая координата движущейся точки, м.

С учетом выражения для дифференциала дуги в полярной системе координат формуле (13) можно придать вид

$$t_{\text{к}} = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int\frac{\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}}{\sqrt{r\sin\varphi}}d\varphi \tag{14}$$

Для определения уравнения кривой, выражения (11) и (14) следует приравнять, а затем обе части полученного равенства продифференцировать по φ. Это дает

$$\sqrt{\frac{2}{g}}\,\frac{\frac{1}{2}\frac{dr}{d\varphi}\sqrt{\frac{\sin\varphi}{r}}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{r}{\sin\varphi}}\cos\varphi}{\sin\varphi} = \frac{1}{\sqrt{2g}}\,\frac{\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}}{\sqrt{r\sin\varphi}} \tag{15}$$

После возведения обоих частей равенства (15) в квадрат и преобразований получается дифференциальное уравнение искомой кривой.

$$\frac{dr}{r} = \operatorname{ctg}2\varphi\, d\varphi \tag{16}$$

Решение уравнения (16) имеет вид

$$r = \sqrt{\sin 2\varphi} \text{ или } r^2 = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \sin 2\varphi\,. \tag{17}$$

Это уравнение лемнискаты Бернулли.

К этой же группе задач могут быть отнесены задача о парацентрической изохроне [3] и задача о таутохроне [1], [5].

Свое место в курсе теоретической механики может найти и задача о брахистохроне. Один из методов ее решения основан на частном случае оптико-механической аналогии [4], [6]. Даже очень упрощенное изложение этой аналогии на примере частного случая расширяет научный кругозор студентов / курсантов, что особенно необходимо в современных условиях.

Выводы. Проведенный анализ имеющихся задач о движении тяжелых материальных точек по неподвижным кривым линиям подтверждает мысль автора о том, что достаточное число этих задач может и сейчас применяться при проведении занятий по теоретической механике в технических высших учебных заведениях. Показано, что описанные задачи могут использоваться для привития студентам/курсантам необходимых навыков и знаний, а также для повышения интереса к изучаемому материалу. Кроме того, успешное решение своими силами нестандартных задач, поставленных и исследованных великими учеными-механиками прошлых эпох, повышает веру студента в свои возможности, что благоприятно сказывается на его отношении к учебе. Немаловажное значение имеет и то обстоятельство, что данные задачи не обезличены, а связаны с именами знаменитых людей, с их трудами и открытиями. Это позволяет внести в технико-теоретические дисциплины существенную гуманистическую составляющую.

Таким образом, наследие предыдущих этапов развития теоретической механики не оказывается затерянным, а сохраняет свое значение для современности, чем осуществляется преемственность в учебных курсах этой науки.

Литература

1. Аппель, П. Теоретическая механика: в 2 т. / П. Аппель. – М.: Физматлит, 1960. – Т. 1 : Статика. Динамика точки. – 515 с.

2. Раус, Э. Д. Динамика системы твердых тел: в 2 т. / Э. Д. Раус. – М.: Наука, 1983. – Т. 1. – 463 с.

3. Никифоровский, В. А. Великие математики Бернулли / В. А. Никифоровский. – М.: Наука, 1984. – 180 с.

4. Яковлев, В. И. Начала аналитической механики / В. И. Яковлев. – Москва – Ижевск.: Издательство Института компьютерных исследований, 2002. – 339 с.

5. Жуковский, Н. Е. Аналитическая механика / Н. Е. Жуковский. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 280 с.

6. Амелькин, В. В. Дифференциальные уравнения в приложениях / В. В. Амелькин. – М: Наука, 1987. – 157 с.

Поступила в редакцию 12.01.2010

D.V. Komnatny

THE HEAVY POINTS MOVEMENT ON UNMOVED CURVES POROBLEMS IN THE THEORETICAL MECHANICS COURSE

The heavy point's movement on unmoved curves classic problems use in the theoretical mechanics high school course is considered in the article. The mentioned problems are chosen in such way, that during their analysis students adopt and consolidate useful common methods of theoretical mechanics problems solving. The examples of choused by these signs problems of heavy point's movement are detailed in the article.