того, чтобы руководители команд могли увезти с собой полный комплект документов итогов олимпиады, а также отмеченные командировки, финансовые документы.

13 Оргкомитету при назначении оргвзноса желательно учитывать материальные возможности вузов при отправлении команд для участия во Всероссийской студенческой олимпиаде, особенно, если вузы находятся далеко от места проведения мероприятия.

Получено 12.04.2006

**ISBN 978-985-468-276-1. Механика. Научные исследования и учебно-методические разработки. Вып. 1. Гомель, 2007**

УДК 656.25:531

*Д. В. КОМНАТНЫЙ*

*Гомельский государственный технический университет им. П. О. Сухого, Гомель*

# ИЗУЧЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ КАМЕРТОНА В КУРСЕ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ СПЕЦИАЛЬНОСТИ «АВТОМАТИКА И ТЕЛЕМЕХАНИКА НА ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОМ ТРАНСПОРТЕ»

Анализируется необходимость изучения студентами специальности «Автоматика и телемеханика на железнодорожном транспорте» колебаний связанных систем, в частности камертона. Предлагается способ вывода уравнений колебаний камертона и их решения, основанный на энергетическом методе.

Системы железнодорожной автоматики и телемеханики (ЖАТ) обеспечивают безопасность движения поездов. Поэтому в устройствах автоматики и телемеханики на железнодорожном транспорте должны использоваться высоконадежные элементы, в числе которых генераторы и фильтры электромагнитных колебаний. Установлено, что одними из наиболее надежных типов фильтров являются камертонные [1]. По сообщениям научно-технической периодики в системах ЖАТ нашли применение камертонные генераторы электромагнитных колебаний, которые являются миниатюрными устройствами с электрическим источником энергии и механическим осциллятором. Эти генераторы были впервые предложены в 1956 году швейцарским инженером М. Хетцелем. Первоначально они использовались в часовых механизмах, опыт эксплуатации которых показал высокую точность генерирования сигнала и достаточную надежность [2, 3].

Основным элементом описанных устройств является камертон. Будущие специалисты в области железнодорожной автоматики и телемеханики для использования камертонных устройств должны иметь знание о закономерностях их механических колебаний. Их изучение в курсе теоретической механики для будущих специалистов служб сигнализации, централизации и блокировки позволит существенно обогатить учебный курс. Как известно, в этом курсе рассматриваются только простейшие колебания систем с одной степенью свободы, причем почти в том же объеме, что и в курсе общей физики. Это не способствует хорошей подготовке студентов, а наоборот, обусловливает недостаток необходимых для дальнейшего изучения автоматики и телемеханики знаний.

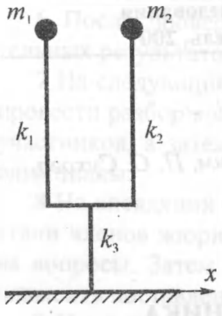

Рисунок 1 – Модель камертона

Камертон является колебательной системой с распределенными параметрами. Изучение колебаний таких систем требует использования теории уравнений с частными производными, которая не входит в программы железнодорожных вузов. Поэтому для учебных целей рационально использовать упрощенную модель камертона из монографии [3]. В этой модели принимается, что масса ветвей камертона много меньше масс основания и опоры. Ветви камертона заменяются невесомыми пластинами, на концах которых закреплены точечные массы $m_1$ и $m_2$, численно равные массам ветвей. Ветви камертона жестко связаны друг с другом (рисунок 1). Коэффициенты жесткости ветвей равны $k_1$ и $k_2$ соответственно, а коэффициент жесткости ножки – $k_3$.

Для вывода уравнений движения ветвей камертона целесообразно применить энергетический метод [4], так как он позволяет остаться в рамках динамики Ньютона. Излагать вывод и решение уравнений движения предлагается в следующем порядке.

Кинетическая энергия камертона

$$W = \frac{m_1 \dot{x}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{x}_2^2}{2}, \qquad (1)$$

где $x_1$, $x_2$ – координаты масс ветвей камертона, м.

Потенциальная энергия камертона

$$\Pi = \frac{k_1}{2}(x_1 - x_3)^2 + \frac{k_2}{2}(x_2 - x_3)^2 + \frac{k_3}{2}x_3^2, \qquad (2)$$

где $x_3$ – координата ножки камертона, м.

Так как ножка камертона деформируется под действием колебаний ветвей, то для сил упругости справедливо соотношение

$$k_3 x_3 = k_1(x_1 - x_3) + k_2(x_2 - x_3). \qquad (3)$$

Из (3) следует, что

$$x_3 = \frac{k_1 x_1 + k_2 x_2}{k_1 + k_2 + k_3}. \qquad (4)$$

Обозначим

$$k_0 = k_1 + k_2 + k_3. \qquad (5)$$

Так как сопротивление движению камертона предполагается пренебрежимо малым, то в любом положении камертона справедлив закон сохранения энергии

$$W + \Pi = \mathrm{const}. \qquad (6)$$

Тогда справедливо соотношение

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(W + \Pi) = 0. \qquad (7)$$

Для координаты $x_1$ имеем

$$\frac{\partial}{\partial x_1} W = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{m_1 \dot{x}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{x}_2^2}{2}\right) = m_1 \ddot{x}_1; \qquad (8)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \Pi = k_1 (x_1 - x_3). \qquad (9)$$

Тогда из (7) следует, что

$$m_1 \ddot{x}_1 + k_1 (x_1 - x_3) = 0. \qquad (10)$$

Подставив в уравнение (10) соотношение (4) и учитывая (5), получим дифференциальное уравнение движения массы $m_1$

$$m_1 \ddot{x}_1 + \frac{k_1(k_2 + k_3)}{k_0} x_1 - \frac{k_1 k_2}{k_0} x_2 = 0. \qquad (11)$$

Рассуждая аналогичным образом, получаем дифференциальное уравнение движения массы $m_2$

$$m_1 \ddot{x}_2 + \frac{k_2(k_1 + k_3)}{k_0} x_2 - \frac{k_1 k_2}{k_0} x_1 = 0. \qquad (12)$$

Частные решения уравнений (11) и (12) найдем в виде [3]

$$x_1 = A \sin(nt + \alpha); \quad x_2 = B \sin(nt + \alpha), \qquad (13)$$

где $A$, $B$ – амплитуды колебаний, м; $n$ – круговая частота колебаний, с$^{-1}$; $\alpha$ – фаза колебаний, рад.

Подставив формулы (13) в уравнения (11) и (12), получаем следующие соотношения:

$$m_1 n^2 A - \frac{k_2(k_1 + k_3)}{k_0} A + \frac{k_1 k_2}{k_0} B = 0; \qquad (14)$$

$$m_2 n^2 B - \frac{k_2(k_1 + k_3)}{k_0} B + \frac{k_1 k_2}{k_0} A = 0. \qquad (15)$$

Из соотношения (14) имеем

$$\frac{B}{A}=\frac{k_1(k_2+k_3)-m_1k_0n^2}{k_1k_2}. \qquad (16)$$

Из соотношения (15) имеем

$$\frac{B}{A}=\frac{k_1k_2}{k_2(k_1+k_3)-m_2k_0n^2}. \qquad (17)$$

Приравняв (16) и (17) и выполнив преобразования, получаем биквадратное уравнение для частот колебаний

$$n^4-\left(\Theta_1^2+\Theta_2^2\right)n^2+\Theta_1^2\Theta_2^2\left(1-\varepsilon^2\right)=0. \qquad (18)$$

В уравнении (18) величины $\Theta_1$ и $\Theta_2$ называются парциальными частотами, а $\varepsilon^2$ – коэффициентом связи. Они вычисляются по формулам:

$$\Theta_1=\frac{k_1(k_2+k_3)}{k_0m_1}; \qquad (19)$$

$$\Theta_1=\frac{k_2(k_1+k_3)}{k_0m_2}; \qquad (20)$$

$$\varepsilon^2=\frac{k_1k_2}{(k_1+k_3)(k_2+k_3)}. \qquad (21)$$

Уравнение (18) имеет два положительных корня, соответственно колебания системы имеют две собственные круговые частоты $n_1$ и $n_2$. Для разработки электромеханических фильтров и генераторов представляют интерес именно значения частот. Поэтому при рассмотрении законов движения масс ветвей камертона достаточно ограничиться следующим. Так как камертон имеет две частоты собственных колебаний, то в формулах (13) должны быть представлены два типа колебаний.

$$x_1=A_1\sin(n_1t+\alpha_1)+A_2\sin(n_2t+\alpha_2); \qquad (22)$$

$$x_2=B_1\sin(n_1t+\alpha_1)+B_2\sin(n_2t+\alpha_2). \qquad (23)$$

Из формулы (16) следует, что при частоте $n_1$ амплитуды $A_1$ и $B_1$ связаны некоторым коэффициентом пропорциональности $\beta_1$. Аналогично из формулы (17) следует, что при частоте $n_2$ амплитуды $A_2$ и $B_2$ связаны коэффициентом $\beta_2$. Поэтому формулы (22) и (23) приобретают вид:

$$x_1=A_1\sin(n_1t+\alpha_1)+A_2\sin(n_2t+\alpha_2); \qquad (24)$$

$$x_2=\beta_1A_1\sin(n_1t+\alpha_1)+\beta_2A_2\sin(n_2t+\alpha_2). \qquad (25)$$

Амплитуды и начальные фазы колебаний в соотношениях (24) и (25) определяются из начальных условий.

Полученные соотношения для определения собственных частот колебаний камертонов могут стать основой для дальнейшего изучения электромеханических приборов систем ЖАТ. Поэтому изучение элементов теории колебаний связанных осцилляторов в курсе теоретической механики явится связующим звеном между общетеоретической и специальными дисциплинами. Такие связи крайне желательны с методической точки зрения, поскольку систематизируют и упорядочивают учебный процесс на протяжении всего срока обучения студента в вузе.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1 **Лисенков, В. М.** Безопасность технических средств в системах управления движением поездов / В. М. Лисенков. – М.: Транспорт, 1992. – 192 с.

2 **Пипуныров, В. Н.** История часов с древнейших времен до наших дней / В. Н. Пипуныров. – М.: Наука, 1982. – 496 с.

3 **Аксельрод, З. М.** Теория и проектирование приборов времени / З. М. Аксельрод. – М.: Машиностроение, 1969. – 480 с.

4 **Зельдович, Я. Б.** Высшая математика для начинающих / Я. Б. Зельдович. – М.: Физматгиз, 1963. – 500 с.



Получено 25.04.2006

**ISBN 978-985-468-276-1. Механика. Научные исследования и учебно-методические разработки. Вып. 1. Гомель, 2007**

УДК 378.141.2/.5:531



*А. О. ШИМАНОВСКИЙ, И. Е. КРАКОВА*

*Белорусский государственный университет транспорта, Гомель*


# МЕЖДУНАРОДНАЯ ОЛИМПИАДА ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ 2006 года


Приведена информация о Международной олимпиаде по теоретической механике 2006 года, состоявшейся 10–13 апреля в Белорусском государственном университете транспорта: список участников, условия и решения задач, результаты олимпиады.


В 2005 г. БелГУТ впервые встречал участников Международной олимпиады по теоретической механике. Статус международной она приобрела в том же году, так как в ней приняли участие студенты нескольких государств. В 2006 году олимпиада проводилась с 10 по 13 апреля. В ней приняли участие 66 студентов, представлявшие 14 вузов Беларуси, России и Молдавии.

Традиционно олимпиада включала в себя два конкурса: теоретический (лично-командный) и «Брейн-ринг» (командный).