Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXX, № 3

МАТЕМАТИКА

К. К. МАРДЖАНИШВИЛИ

ОБ ОДНОЙ СИСТЕМЕ УРАВНЕНИЙ В ПРОСТЫХ ЧИСЛАХ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 30 XI 1949)

1. Пусть $0 < l < m < \cdots < n$ — целые постоянные, g — число чисел $l, m, \ldots n$; $n > 1$; s—целое положительное постоянное; $0 < N_l < N_m < \cdots < N_n$ — целые, которые могут неограниченно возрастать.

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned} p_1^l + \ldots + p_s^l &= N_l, \\ p_1^m + \ldots + p_s^m &= N_m, \\ \ldots\ldots\ldots& \\ p_1^n + \ldots + p_s^n &= N_n \end{aligned} \tag{1}$$

в простых числах $p_1, \ldots, p_s$.

В частном случае $g = n$ (когда числа $l, m, \ldots, n$ принимают все значения от 1 до n без пропуска) система (1) была исследована мной ([1],[2]), причем была выведена асимптотическая формула для числа решений этой системы, сперва при числе слагаемых порядка $n^3 \log n$, а затем $n^2 \log n$. В настоящей работе проводится изучение системы (1) при числе слагаемых порядка $ng \log n$.

2. Введем следующие обозначения: $\nu = 1/n$,

$$N_n = P^n, \quad N_k = h_k P^k \quad (k = l, m, \ldots, n) \tag{2}$$

(P — действительное > 0);

$$\Delta(z_1, \ldots, z_g) = \begin{vmatrix} z_1^{l-1} & \ldots & z_g^{l-1} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ z_1^{n-1} & \ldots & z_g^{n-1} \end{vmatrix}; \tag{3}$$

$$D = D(a_l, q_l; \ldots; a_n, q_n) = \frac{1}{\varphi(q_l \ldots q_n)} \sum_r{}' e^{2\pi i \left(\frac{a_n}{q_n} r^n + \ldots + \frac{a_l}{q_l} r^l\right)}, \tag{4}$$

где $(a_k, q_k) = 1$ $(k = l, m, \ldots, n)$ и r пробегает приведенную систему вычетов по модулю $q_l \ldots q_n$;

$$A = A(q_l, \ldots, q_n; s; N_l, \ldots, N_n) = \sum_{a_l, \ldots, a_n}{}' D^s e^{-2\pi i \left(\frac{a_n}{q_n} N_n + \ldots + \frac{a_l}{q_l} N_l\right)} \tag{5}$$

($a_l, \ldots, a_n$ пробегают приведенные системы вычетов соответственно по модулям $q_l, \ldots, q_n$);

$$S = S(N_l, \ldots, N_n;\ l, \ldots, n; s) = \sum_{q_l, \ldots, q_n = 1}^{\infty} A(q_l, \ldots, q_n; s; N_l, \ldots, N_n). \quad (6)$$

Теорема 1. *Если f — целое $\geqslant 3ng$, $s = f + 2gr$, где*

$$r = [2n \log 10ng + n \log\log 20ng + 1], \quad (7)$$

и система уравнений

$$\xi_1^k + \ldots + \xi_f^k = h_k \quad (k = l, m, \ldots, n)$$

разрешима в действительных числах $\xi_1, \ldots, \xi_f$, удовлетворяющих условиям

$$\xi_j \geqslant \varepsilon \quad (j = 1, 2, \ldots, f) \text{ и } |\Delta(\xi_1, \ldots, \xi_g)| \geqslant \varepsilon,$$

где $\varepsilon > 0$ — некоторое постоянное, то число $I = I(N_l, \ldots, N_n; l, \ldots, n; s)$ решений системы (1) *удовлетворяет неравенству*

$$I \geqslant P^{f + 2gn(1 - (1-\nu)^r) - (l + \ldots + n)} (\log P)^{-f-2gr} (CS + O(\log P)^{-\omega}), \quad (8)$$

где постоянное

$$C = C(l, \ldots, n; f, g, \varepsilon) > 0$$

и S определяется равенствами (4) — (6).

3. Рассмотрим некоторое простое p и целое $m > 0$ и определим $\theta_m(p) = \theta_m$ из условия $p^{\theta_m(p)} \diagdown\!\!\diagdown m$ (т. е. $p^{\theta_m} \diagdown m$, $p^{\theta_m + 1} \times p$).

Введем обозначение

$$\theta_0(p) = \theta_0 = \max(\theta_l, \ldots, \theta_n).$$

Пусть, далее, $\theta(p) = \theta$ обозначает то целое, которое определяется из условия, что

$$p^\theta \diagdown \begin{vmatrix} y_{11}^{n-l} & \ldots & y_{g1}^{n-l} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ y_{11}^{l-l} & \ldots & y_{g1}^{l-l} \end{vmatrix}$$

при любых целых $y_{11}, \ldots, y_{g1}$, не делящихся на p, но что для некоторой системы $y_{10}, \ldots, y_{g0}$ чисел, также не делящихся на p,

$$p^{\theta+1} \times \begin{vmatrix} y_{10}^{n-l} & \ldots & y_{g0}^{n-l} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ y_{10}^{l-l} & \ldots & y_{g0}^{l-l} \end{vmatrix}.$$

Теорема 2. *Если $\pi_1, \ldots, \pi_t$ — все простые $\leqslant n$ и целые $M_l, \ldots, M_n$ удовлетворяют системе сравнений*

$$\begin{vmatrix} y_{10}^{n-l} & \ldots & y_{(g-1)0}^{n-l} M_n \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ y_{10}^{l-l} & \ldots & y_{(g-1)0}^{l-l} M_l \end{vmatrix} \equiv 0 \pmod{p^\theta}, \ldots, \begin{vmatrix} M_n y_{20}^{n-l} & \ldots & y_{g0}^{n-l} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ M_l y_{20}^{l-l} & \ldots & y_{g0}^{l-l} \end{vmatrix} \equiv 0 \pmod{p^\theta}$$

при p, равном $\pi_1, \ldots, \pi_t$, то можно найти натуральное $s_0(M_l, \ldots, M_n; l, \ldots, n) < C_1(l, \ldots, n)$ такое, что

$$S(M_l, \ldots, M_n; s_0; l, \ldots, n) \geqslant C_2(l, \ldots, n) > 0.$$

4. Обозначим теперь через $W_1(p^h, s; M_l, \ldots, M_n)$ число решений системы

$$y_1^l + \ldots + y_s^l \equiv M_l \pmod{p^h},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y_1^n + \ldots + y_s^n \equiv M_n \pmod{p^h},$$

удовлетворяющих условиям

$$1 \leqslant y_j < p^h, \quad (y_j, p) = 1 \quad (j = 1, \ldots, g),$$

$$1 \leqslant y_i < p^{h-\theta-\theta_0}, \quad (y_i, p) = 1 \quad (i = g+1, \ldots, s)$$

и

$$p^\theta \not\mid \begin{vmatrix} y_1^{n-l} \ldots y_g^{n-l} \\ \ldots\ldots \\ y_1^{l-l} \ldots y_g^{l-l} \end{vmatrix}.$$

Теорема 2а. *Если $\pi_1, \ldots, \pi_t$ — все простые, не превосходящие n; $\pi_{t+1}, \ldots, \pi_r$ — все простые, бо́льшие n, но меньшие n^{n+1}; $s \geqslant 3ng$,*

$$W_1(\pi_k^{2\theta(\pi_k)+2\theta_0(\pi_k)+1};\ s;\ M_l, \ldots, M_n) \geqslant 1 \quad (k = 1, 2, \ldots, t)$$

и система сравнений

$$y_1^l + \ldots + y_s^l \equiv M_l \pmod{\pi_{t+1} \ldots \pi_r},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y_1^n + \ldots + y_s^n \equiv M_n \pmod{\pi_{t+1} \ldots \pi_r}$$

разрешима в целых $y_1, \ldots, y_s$, взаимно простых с $\pi_{t+1}, \ldots, \pi_r$, то

$$S(M_l, \ldots, M_n;\ s;\ l, \ldots, n) > C_3(l, \ldots, n; s) > 0.$$

Математический институт
им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
28 XI 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] К. К. Марджанишвили, Изв. АН СССР. сер. матем., 4, 193 (1940).
[2] К. К. Марджанишвили, Сообщ. АН Груз. ССР, 8, № 9—10, 597 (1947).