Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXX, № 3

МАТЕМАТИКА

Т. И. ЛУКОМСКИЙ

К ТЕОРИИ МАТРИЧНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ НЕОГРАНИЧЕННЫХ САМОСОПРЯЖЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 30 XI 1949)

Каждому оператору A в сепарабельном унитарном пространстве H можно отнести совокупность

$$\{\{e_k\}, \|a_{ik}\|\}, \tag{1}$$

где $\{e_k\}$ — ортонормированный базис пространства H (мы будем говорить просто базис), а числа a_{ik} определяются условием $a_{ik}=(Ae_k, e_i)$.

Если оператор A ограничен, то совокупность (1) может отвечать лишь одному оператору. Чтобы сохранить это свойство и для неограниченных операторов, с каждым замкнутым оператором связывают ([1]) особый класс базисов, которые мы будем называть допустимыми.

Допустимые базисы. Базис $\{e_k\}$ называется допустимым для замкнутого оператора A, если A есть замыкание оператора A_1, определенного на многообразии всех конечных сумм вида $f=\sum_{k=1}^{n} x_k e_k$ формулой

$$A_1 f = \sum_{k=1}^{n} x_k A e_k.$$

Теорема 1. *Если пространство H распадается в ортогональную сумму $H=\sum_k \oplus H_k$ инвариантных относительно замкнутого оператора A подпространств и если, следовательно, сам оператор A распадается в ортогональную сумму $A=\sum_k \oplus A_k$ своих частей, то допустимый базис оператора A можно получить объединением допустимых базисов всех A_k.*

Из этой теоремы, в частности, следует, что если A — эрмитов * оператор с чисто точечным спектром, то совокупность всех его ортонормированных собственных векторов образует допустимый базис.

Теорема 2. *Если области определения Ω_A и Ω_B замкнутых операторов A и B таковы, что $\Omega_B \subset \Omega_A$, то имеются лишь две возможности:* а) *либо всякий базис, допустимый для оператора B, допустим и для A;* б) *либо A и B не имеют ни одного общего допустимого базиса.*

---

* Оператор A мы называем эрмитовым, если $A=A^*$, и самосопряженным, если $A \subset A^*$.

Если же $\Omega_B = \Omega_A$, то всякий базис, допустимый для одного из них, допустим и для другого.

Теорема 3. *Пусть A_1, $A_2, \ldots, A_k$ — замкнутые операторы. Обозначим через Ω пересечение их областей определения, а через $A'_1, A'_2, \ldots, A'_k$ — операторы, индуцированные операторами $A_1, A_2, \ldots, A_k$ на многообразии Ω.*

Для того чтобы $A_1, A_2, \ldots, A_k$ имели общий допустимый базис, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\overline{A'_1} = A_1, \quad \overline{A'_2} = A_2, \ldots, \overline{A'_k} = A_k.$$

Из этих теорем следует, что если A — эрмитов оператор и $P(A)$ — полином от A степени не выше n, то всякий базис, допустимый для A^n, допустим и для $P(A)$. Существуют базисы, являющиеся допустимыми одновременно для всех полиномов от эрмитова A; таковыми являются, например, все допустимые базисы оператора e^A.

Матричные представления и их унитарная эквивалентность. Матричным представлением самосопряженного оператора A называется такая совокупность (1), в которой базис $\{e_k\}$ является допустимым для A.

Дж. Нейман ([2]) предложил определение унитарной эквивалентности матричных представлений. Но его унитарная эквивалентность не транзитивна; кроме того, унитарно-эквивалентные в его смысле представления могут отвечать различным операторам. Ниже дается такое определение унитарной эквивалентности матричных представлений, которое лишено отмеченных выше недостатков определения Дж. Неймана.

С каждым оператором A мы связываем множество $\mathfrak{U}_A$ всех тех унитарных операторов, которые отображают область определения оператора A на себя. Множество $\mathfrak{U}_A$ содержит бесконечно много элементов, ибо в него входят, например, все унитарные операторы, являющиеся функциями эрмитова оператора $B = \sqrt{A^*A}$.

Роль множества $\mathfrak{U}_A$ выясняет теорема 4.

Теорема 4. *Для того чтобы каждый из унитарных операторов $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{U}^{-1}$ переводил всякий допустимый базис замкнутого оператора A в допустимый же, необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{U} \in \mathfrak{U}_A$.*

Пусть (1) — матричное представление самосопряженного оператора A. Условие того, что элемент $f = \sum_k x_k e_k$ входит в Ω_A, может быть записано в чисто матричных терминах, т. е. в этом условии будут фигурировать только числа a_{ik} и x_k (см., например, ([3]), стр. 112).

Отсюда следует, что условие того, что унитарный оператор $\{\{e_k\}, \| u_{ik} \|\}$ входит в $\mathfrak{U}_A$, также можно записать в чисто матричных терминах, т. е. в этом условии будут участвовать лишь числа a_{ik} и u_{ik}.

Определение. Матричное представление $\{\{e'_k\}, \| b_{ik} \|\}$ называется унитарно-эквивалентным матричному представлению $\{\{e_k\}, \| a_{ik} \|\}$ самосопряженного оператора A, если

$$b_{ik} = \sum_\rho \bar{u}_{\rho i} \left(\sum_\sigma u_{\sigma k}\, a_{\rho\sigma} \right) = \sum_\sigma u_{\sigma k} \left(\sum_\rho \bar{u}_{\rho i} a_{\rho\sigma} \right),$$

где $u_{\mu\nu} = (e'_\nu, e_\mu)$ и унитарный оператор $\{\{e_k\}, \| u_{ik} \|\}$ принадлежит $\mathfrak{U}_A$.

Так как $\mathfrak{U}_A$ есть группа, то наша унитарная эквивалентность есть соотношение эквивалентности, т. е. рефлексивна, симметрична и транзитивна. Кроме того, из теоремы 4 следует, что два унитарно-эквивалентных представления всегда отвечают одному и тому же оператору.

Как и для ограниченных операторов, можно встать на другую точку зрения, при которой базис $\{e_k\}$ считается фиксированным. В этом случае мы имеем дело не с матричными представлениями, а просто с матрицами $\| a_{ik} \|$, и наше определение унитарной эквивалентности матричных представлений превращается в определение унитарной эквивалентности матриц. При этом матрицы $\| a_{ik} \|$ и $\| b_{ik} \|$ оказываются унитарно-эквивалентными тогда и только тогда, когда отвечающие им операторы A и B связаны условием:

$$B = UAU^{-1}, \qquad U \in \mathfrak{U}_A.$$

Поступило
30 XI 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] J. v. Neumann, Math. Ann.. **102**, 49 (1929). [2] J. v. Neumann, Journ. f. reine u. angew. Math., **161**, 208 (1929). [3] А. И. Плеснер, Усп. матем. наук, в. 9, 3 (1941).