Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXX, № 3

МАТЕМАТИКА

Академик М. А. ЛАВРЕНТЬЕВ и А. В. БИЦАДЗЕ

К ПРОБЛЕМЕ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА

§ 1. Общие замечания. Ряд важных проблем газовой динамики сводится к краевым задачам уравнений второго порядка смешанного типа: область, в которой ищется решение, состоит из двух частей, в одной из которых уравнение принадлежит эллиптическому типу (эллиптическая часть области), а в другой — гиперболическому типу (гиперболическая часть области).

Наряду с этим, до настоящего времени для уравнений смешанного типа не решена основная задача определения краевых условий, обеспечивающих единственность, существование и устойчивость решения.

Одним из первых важных результатов, относящихся к этой проблеме, является следующий результат Трикоми ([1]).

Пусть дано уравнение

$$yu_{xx} + u_{yy} = 0 \tag{1}$$

и область D, ограниченная: 1) линией L с концами в точках $A(a, 0)$, $B(b, 0)$ и расположенная в верхней полуплоскости; 2) характеристиками L_1 и L_2 уравнения (1) различного семейства, выходящими, соответственно, из точек A и B. При этих условиях, каковы бы ни были достаточно гладкие функции φ и φ_1, заданные на L и L_1, всегда существует одно и только одно решение $u(x, y)$ уравнения (1), правильное в D и принимающее на L и L_1, соответственно, значения φ и φ_1*.

Теорема существования у Трикоми доказывается для очень специальных линий L.

Результат Трикоми был дополнен различными авторами, в частности Ф. И. Франкль показал, что характеристику L_1 можно заменить линией $\overline{L}$, расположенной в D, отчасти совпадающей с L_1, а в остальном достаточно близкой к ней.

В настоящей заметке мы даем предельно простое решение как самой задачи Трикоми, так и некоторых ее обобщений для случая уравнения

$$u_{xx} + \theta(y) u_{yy} = 0, \tag{2}$$

где $\theta(y) = 1$ при $y > 0$ и $\theta(y) = -1$ при $y < 0$.

* Доказательство теоремы единственности в случае задачи Трикоми в тексте ([1]) основывается на такой теореме: если две квадратичные формы $\sum A_{hk} u_h u_k$, $\sum B_{hk} u_h u_k$ таковы, что $A_{hk} = M_h N_k B_{hk}$, где числа M_h, N_k все одного знака и зависят, соответственно, только от индексов h и k, то эти две формы или обе положительно определены или обе отрицательно определены. Эта теорема верна только в том случае, если $M_h N_k = M_k N_h$, а Трикоми применяет ее не для такого случая (([1]), стр. 47). Хотя в работе ([2]) Трикоми дает другой вариант доказательства теоремы единственности, но, как это следует из ([2]), он не замечает допущенной в тексте ([1]) неточности.

§ 2. Постановка задачи. Пусть D_k — область, ограниченная: 1) линией Жордана L, расположенной в верхней полуплоскости и соединяющей точки $A(0, 0)$ и $B(1, 0)$; 2) прямолинейными отрезками L_k: $y = -kx$, $0 < k \leqslant 1$, $0 \leqslant (1+k)x \leqslant 1$ и L_2: $y = x - 1$, $1 \leqslant 2x \leqslant 2$. При этих условиях требуется определить функцию $u(x, y)$ со следующими свойствами: 1) $u(x, y)$ является решением уравнения (2) в области D_k при $y \neq 0$; 2) она непрерывна в замкнутой области $\overline{D}_k$ и имеет первые производные, непрерывные в этой же области всюду, кроме, быть может, точек A и B, причем u_x и u_y могут обращаться в бесконечность порядка ниже 1 при $x \to 0$ или $x \to 1$; 3) на L и L_k она принимает соответственно заданные значения φ и ψ; предполагается, что φ имеет ограниченную производную, а ψ непрерывна вместе со своими производными до второго порядка, причем $\varphi(A) = \psi(A)$.

В приведенной формулировке случай $k = 1$ соответствует задаче Трикоми. Именно с этого случая мы и начнем изложение.

§ 3. Задача Трикоми Т. Для решения задачи Т построим, прежде всего, общее решение уравнения (2) для нижней полуплоскости:

$$u = f_1(x - y) + f_2(x + y), \tag{3}$$

где f_1 и f_2 — произвольные, дважды непрерывно дифференцируемые функции, причем, не нарушая общности, очевидно, можно предполагать $f_2(0) = 0$. Используя граничные значения $u(x, y)$ на L_1 в силу 3) получим

$$u_x - u_y = \psi'(^1/_2\, x), \quad \psi(^1/_2\, x) = f_1(x), \quad y = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1. \tag{4}$$

Таким образом, искомая функция u должна на отрезке AB удовлетворять условию (4). Для определения $u(x, 0)$, а следовательно, $f_2(x) = u(x, 0) - f_1(x)$, обратимся к эллиптической части области D, где u есть гармоническая функция, причем ее производные по x и y на переходной линии AB должны совпадать с соответствующими производными u из гиперболической части области. Следовательно, задача Т сводится к следующей известной задаче для уравнения Лапласа: *в области D, ограниченной линией L и отрезком AB оси x-ов, требуется построить гармоническую функцию, принимающую на L заданные значения φ, а на отрезке AB удовлетворяющую условию* (4).

Приведем одно простое решение сформулированной задачи. Запишем, прежде всего, условие (4) в форме $\sqrt{2}\, u_t = \psi'(^1/_2\, x)$, где t есть направление, образующее с положительным направлением оси x-ов угол $-{}^1/_4\,\pi$.

Отобразим теперь конформно $z = f(\zeta)$, $z = x + iy$, $\zeta = \xi + i\eta$, область D на угол, образуемый лучами λ_1: $\arg \zeta = 0$, λ_2: $\arg \zeta = {}^1/_4\,\pi$ при условиях, что отрезок AB перейдет в луч λ_2, а точка B — в точку ∞. Пусть при этом отображении неизвестная функция $u(x, y)$ перейдет в функцию $v(\xi, \eta)$. Гармоническая функция $v(\xi, \eta)$, правильная внутри угла, будет на границах этого угла удовлетворять условиям

$$v_\xi = \varphi'(\zeta)\,|f'(\zeta)| \text{ на } \lambda_1, \qquad \sqrt{2}\, v_\xi = -\psi'(^1/_2\, x)\,|f'(\zeta)| \text{ на } \lambda_2.$$

Замечая, что v_ξ есть гармоническая функция, заключаем, что задача полностью редуцирована к классической задаче Дирихле. Существование и единственность решения задачи Дирихле обеспечивают существование и единственность рассматриваемой задачи.

Сформулируем полученный качественный результат.

Теорема 1. *В условиях поставленной задачи при $k = 1$, если* *линия L удовлетворяет условию Ляпунова*, а функция φ обладает ограниченной производной, то решение существует, единственно и устойчиво.*

§ 4. В этом параграфе мы приведем одно обобщение задачи Т.

Пусть $E_k(a_k, 0)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, — заданные точки отрезка AB: $0 < a_1 < \ldots < a_n < 1$. Очевидно, что точки $A_k({}^1/_2\, a_k, -{}^1/_2\, a_k)$, $B_k({}^1/_2\, a_k + {}^1/_2, {}^1/_2\, a_k - {}^1/_2)$, $a_0 = 0$, $a_{n+1} = 1$, лежат на характеристиках L_1 и L_2 уравнения (2).

Задача T_1. Требуется определить функцию $u(x, y)$ со следующими свойствами: 1) u является решением уравнения (2) в области D при $y \neq 0$; 2) она непрерывна в замкнутой области $\overline{D}$ и имеет первые производные, непрерывные в этой же области всюду, кроме, быть может, отрезков $E_k A_k$, $E_k B_k$ характеристик уравнения (2) и точек A и B, причем предполагается, что в окрестности упомянутых отрезков и точек u_x и u_y могут обращаться в бесконечность порядка ниже 1; 3) на линиях L, L_1 и L_2 она удовлетворяет условиям:

$$u = \varphi \text{ на } L,$$

$u = \varphi_k$ на $A_k A_{k+1}$ при четном k, $u = \varphi_k$ на $B_k B_{k+1}$ при нечетном k, где φ, φ_k $(k = 0, 1, \ldots, n)$ — заданные функции.

Для решения задачи T_1 с успехом применяется качественный метод, развитый в § 3, и получается теорема, аналогичная теореме 1.

Теорема 2. *Если L удовлетворяет условию Ляпунова, функция φ имеет ограниченную производную, а функции φ_k дважды непрерывно дифференцируемы, то решение задачи T_1 всегда существует, единственно и устойчиво.*

§ 5. Общий случай. И в этом случае задача может быть сведена к некоторой смешанной краевой задаче для уравнения Лапласа. В самом деле, используя задание u на L_k и общее решение (3) уравнения (2), получим для определения f_1 следующее функциональное уравнение:

$$f_1(t) - f_1(\lambda t) = \psi[({}^1/_2 + {}^1/_2\,\lambda)\, t] - u(\lambda t, 0), \tag{5}$$

где $(1 + k)\, x = t$, $(1 - k) : (1 + k) = \lambda < 1$. Применяя к (5) метод итераций, выразим $f_1(t)$ с помощью функций ψ и $u(x, 0)$. Подставляя полученное выражение для f_1 в (3) и дифференцируя по y, при $y = 0$ получим

$$u_y - u_x(x, 0) - 2 \sum_{n=1} u_x(\lambda^n x, 0) =$$

$$= -2 \sum_{n=0} \psi'\, [({}^1/_2 + {}^1/_2\,\lambda)\, \lambda^n x]\, ({}^1/_2 + {}^1/_2\,\lambda)\, \lambda^n. \tag{6}$$

Построенные формально ряды будут, очевидно, равномерно сходиться, если $\psi(0) = 0$ и если функции ψ и $u\ (x, 0)$ при $x = 0$ будут иметь нулевые производные.

Полученное соотношение (6) дает искомую редукцию нашей задачи. В области D, ограниченной линией L и отрезком AB, требуется определить гармоническую функцию u по граничным условиям: 1) на L функция u принимает заданные значения φ, 2) на отрезке AB нормальная и касательная производные должны быть связаны условием (6).

§ 6. Аналитические решения. Обозначим через $L(u)$ опера-

* Угол α, образованный касательной к L с осью x-ов, как функция длины дуги s удовлетворяет условию Гельдера $|\alpha(s + h) - \alpha(s)| \leqslant K h^{\varkappa}$.

тор левой части (6), а через $F(x)$ — правую часть (6). При этих обозначениях условие (6) запишется в виде

$$L(u) = F(x). \tag{7}$$

Обозначим через $P_n(x, y)$ и $Q_n(x, y)$ однородные гармонические полиномы $P_n + iQ_n = z^n$, $z = x + iy$. Для этих полиномов, очевидно, имеем

$$(1 - \lambda^n) L(P_n) = -n(1 + \lambda^n) x^{n-1}, \quad L(Q_n) = nx^{n-1}, \tag{8}$$

откуда легко получается следующий результат: *если функция ψ аналитическая и правильна при $|z| < R$, где $R > 1$, то в круге $|z| < R$ существует гармоническая функция, правильная в этом круге и удовлетворяющая на AB условию* (6).

В самом деле, из аналитичности ψ при $|z| < R$ следует аналитичность $F(x)$ также при $|z| < R$. Итак, пусть $F(x) = \sum a_n x^n$, но тогда, в силу (8), гармоническая функция $Q = \sum a_n Q_{n+1} / (n+1)$ будет обладать всеми нужными свойствами.

Установленное предложение дает возможность в случае аналитичности ψ произвести дальнейшую редукцию задачи. Положим $(1 - \lambda^n) R_n(x, y) = (1 - \lambda^n) P_n + (1 + \lambda^n) Q_n$; в силу (8) имеем

$$L(R_n) = 0. \tag{9}$$

Будем искать функцию $u(x, y)$ внутри области D в виде ряда

$$u = Q + \sum b_n R_n. \tag{10}$$

Эта функция в силу (9) формально удовлетворяет условию (6). Если функция φ, заданная на L, разлагается в ряд (10) и если этот ряд равномерно сходится в замкнутой области $\overline{D}$, то решение поставленной выше задачи существует и оно представляется в виде (10).

Пример. Пусть D_k есть бесконечная область, ограниченная лучами L: $y = 0$ и L_k: $y = -kx$, $0 < k \leqslant 1$. Пусть, кроме того, заданные соответственно на L и L_k функции φ и ψ являются целыми функциями $\varphi(y) = \sum b_n y^n$, $\psi = \sum c_n x^n$, $b_0 = c_0$. Очевидно, что и функция $F(x) = \sum a_n x^n$ целая.

Искомое решение, согласно (10), представляется в виде ряда

$$u(x, y) = b_0 + \sum_1^\infty \left\{ \frac{a_{n-1}}{n} Q_n + \frac{1 - \lambda^{2n-1}}{1 + \lambda^{2n-1}} \left[(-1)^{n-1} b_{2n-1} - \frac{a_{2n-2}}{2n-1} \right] \times \right.$$

$$\left. \times \left[P_{2n-1} + \frac{1 + \lambda^{2n-1}}{1 - \lambda^{2n-1}} Q_{2n-1} \right] + \sum_1^\infty (-1)^n b_{2n} \left[P_{2n} + \frac{1 + \lambda^{2n}}{1 - \lambda^{2n}} Q_{2n} \right] \right\}.$$

Математический институт
им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
28 XI 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ф. Трикоми, О линейных уравнениях в частных производных второго порядка смешанного типа, пер. с итальянского Ф. И. Франкля, 1947. [2] F. Tricomi, Rendiconti della R. Acc. Naz. dei Lincei, ser. 6, **6** (1927) (см. ([1]), дополнение 1).