Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXX, № 3

МАТЕМАТИКА

Р. М. ГЕЙДЕЛЬМАН

О КОНГРУЕНЦИЯХ ОКРУЖНОСТЕЙ, ОБЛАДАЮЩИХ ОДНИМ СЕМЕЙСТВОМ КАНАЛОВЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 28 XI 1949)

1. В работе (1) методом подвижного репера и внешних форм были рассмотрены конгруенции окружностей, обладающих двумя семействами каналовых поверхностей — конгруенции K.

В настоящей работе этим же методом будут изучены более общие типы конгруенций окружностей, у которых одно семейство «развертывающихся» поверхностей (круговых поверхностей, все окружности которых касаются ребер возврата фокальной поверхности) — каналовые.

Отнесем конгруенцию окружностей к фокальному конформному реперу (1). Тогда окружность конгруенции образуется пересечением сфер S_2 и S_3 репера.

Если окружность конгруенции фиксирована, то $\omega_2^0=\omega_1^2=\omega^2=\omega_3^0=\omega_1^3=0$. Следовательно, между этими пятью формами существует три линейных соотношения.

За основные формы примем формы ω_1^3 и ω^2. Они независимы, если фокальная поверхность (A) не сдвоенная.

Тогда

$$\omega_\alpha^\beta=a_\alpha^\beta\omega_1^3+b_\alpha^\beta\omega^2 \qquad (\alpha,\beta=0,1,2,3,4). \tag{1}$$

Произвольная конгруенция окружностей определяется в фокальном репере системой:

$$\begin{aligned} &\omega^3=0, && \omega_3^0=a_3^0\omega_1^3+b_3^0\omega^2,\\ &\omega_1^2=a_1^2\omega_1^3+b_1^2\omega^2, && \omega_2^0=q\omega_3^0 \end{aligned} \tag{2}$$

и существует с произволом четырех функций двух аргументов.

Инвариант q имеет чрезвычайно простой и важный геометрический смысл: q — это котангенс угла между фокальными поверхностями (A) и (A_4).

Если у конгруенций формы ω_3^0 и $q\omega_1^3-\omega_1^2$ линейно зависимы, то поверхность (A_4) — сдвоенная. Такие конгруенции существуют с произволом трех функций двух аргументов.

Произвольная точка окружности имеет вид

$$P=A+pS_1-\frac{p^2}{2}A_4 \tag{3}$$

и определяется на окружности криволинейной абсциссой p. Криволинейные абсциссы фокусов $p_1=0$, $p_4=\infty$; остальные два фокуса A_2 и A_3 определяются уравнением:

$$p^2(a_1^2b_3^0-a_3^0b_1^2-b_2^0)-p(2b_1^2+a_3^0)-2=0. \tag{4}$$

«Развертывающиеся» поверхности определяются уравнением:

$$(\omega_3^0\omega^2)^2 - 2\omega_1^3\omega^2(\omega_3^0\omega_1^2 - \omega_2^0\omega_1^3) = 0. \tag{5}$$

Семейство «развертывающихся» поверхностей, имеющее ребра возврата на фокальной поверхности (A), определяется уравнением $\omega^2 = 0$; семейство, имеющее ребра возврата на фокальной поверхности (A_4), $\omega_3^0 = 0$.

2. Потребуем, чтобы поверхности семейства $\omega^2 = 0$ были каналовыми поверхностями. Такие конгруенции аналитически определяются условием $q = a_1^2$. Будем называть эти конгруенции конгруенциями K_1.

Пользуясь общей теорией исследования систем уравнений Пфаффа ([2]), получим, что конгруенции K_1 существуют с произволом трех функций двух аргументов.

Теорема 1. *Две фокальные поверхности (A_4) и (A_2) конгруенции K_1 огибают одну и ту же конгруенцию сфер $S_2 - a_1^2 S_3$, причем точки касания каждой сферы лежат на одной окружности конгруенции.*

Обратно, если две фокальные поверхности конгруенции огибают одну и ту же конгруенцию сфер, причем точки касания каждой сферы являются фокусами одной и той же окружности конгруенции, то эта конгруенция есть конгруенция K_1.

Теорема 2. *Два семейства «развертывающихся» поверхностей конгруенции K_1, имеющие ребра возврата на фокальных поверхностях (A) и (A_3), вырождаются в семейство сдвоенных каналовых поверхностей, и ребра возврата этих фокальных поверхностей соответствуют.*

Обратно, если два семейства «развертывающихся» поверхностей конгруенции вырождаются в сдвоенное семейство, то эта конгруенция есть конгруенция K_1, а следовательно, поверхности этого сдвоенного семейства — каналовые поверхности.

Итак, у конгруенций K_1 на двух фокальных поверхностях соответствуют ребра возврата, а пара других фокальных поверхностей огибает одну и ту же конгруенцию сфер, причем каналовые поверхности, имеющие ребра возврата на паре фокальных полостей (A) и (A_3), огибают ∞^1 сфер $S_2 - a_1^2 S_3$, касающихся второй пары фокальных поверхностей (A_2) и (A_4) вдоль соответствующих линий.

3. Конгруенции K_1, у которых $a_1^2 = 0$, назовем конгруенциями R_1. Они определяются системой:

$$\begin{aligned} &\omega^3 = 0, && \omega_3^0 = a_3^0\omega_1^3 + b_3^0\omega^2, \\ &\omega_1^2 = b_1^2\omega^2, && \omega_2^0 = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Их внешние дифференциалы имеют вид:

$$\begin{aligned} &[\omega^1\omega_1^3] + [\omega^2\omega_2^3] = 0, && [\Delta a_3^0\omega_1^3] + [\Delta b_3^0\omega^2] = 0, \\ &[\Delta b_1^2\omega^2] = 0, && [\omega_2^1\omega_1^0] + [\omega_2^3\omega_3^0] = 0, \end{aligned} \tag{6'}$$

где Δb_1^2, Δa_3^0, Δb_3^0 — линейные формы, содержащие дифференциалы функций b_1^2, a_3^0, b_3^0.

Исходя из системы (6), убеждаемся, что конгруенции R_1 существуют с произволом двух функций двух аргументов.

Теорема 3. *Фокальная поверхность (A) конгруенции R_1 ортогональна фокальным поверхностям (A_2) и (A_4).*

Действительно, так как $a_1^2=0$, то пара поверхностей (A_2) и (A_4) огибает конгруенцию сфер S_2, а поверхность (A) огибает ∞^2 сфер S_3 фокального репера, откуда и вытекает теорема.

Это свойство и характеризует конгруенции R_1.

Теорема 4. *Сферы S_2 конгруенции R_1 имеют касание второго порядка с ребрами возврата $\omega^2=0$ фокальной поверхности (A).*

Условие касания второго порядка сферы S_2 с линиями $\omega^2=0$ имеет вид:

$$S_2 d^2 A \equiv 0 \,(\operatorname{mod} \omega^2), \quad S_2 d^2 A = \omega_0^0 \omega^2 + d\omega^2 + \omega_1 \omega_1^2 \equiv 0 \,(\operatorname{mod} \omega^2)$$

в силу $a_1^2=0$.

Обратно, конгруенции K_1, у которых сферы S_2 имеют касание второго порядка с ребрами возврата фокальной поверхности (A),— конгруенции R_1.

4. Условие того, что семейство ребер возврата фокальной поверхности (A) — линии кривизны, имеет вид $b^1=0$. Тогда уравнение второго семейства линий кривизны $\omega_1^3=0$.

Конгруенции R_1, у которых семейство ребер возврата $\omega^2=0$ — линии кривизны фокальной поверхности (A), назовем конгруенциями B_1.

Конгруенции B_1 определяются системой

$$\begin{gathered}\omega_1^2 = b_1^2\omega^2, \quad \omega_3^0 = a_3^0\omega_1^3 + b_3^0\omega^2, \quad \omega_2^0 = 0, \\ \omega^1 = a^1\omega_1^3, \quad \omega_2^3 = b_2^3\omega^2\end{gathered} \tag{7}$$

и существуют с произволом одной функции двух аргументов.

Теорема 5. *Пара фокальных поверхностей (A_4) и (A_2) конгруенций B_1 огибает ∞^1 сфер S_2, следовательно, они являются сдвоенной каналовой поверхностью*

$$dS_2 = \omega_2^0 A - \omega_1^2 S_1 + \omega_2^3 S_3 - \omega^2 A_4 \equiv 0 \,(\operatorname{mod} \omega^2).$$

Отсюда вытекает, что все окружности конгруенции B_1 лежат на однопараметрическом семействе сфер S_2, а поверхности (A_2) и (A_4), огибающие это многообразие сфер, — каналовые поверхности.

Следствие. Конгруенции B_1 разложимы на ∞^1 семейств окружностей, лежащих на одной сфере.

Теорема 6. *Семейство кривых $\omega^2=0$ на паре фокальных поверхностей (A) и (A_3) конгруенций B_1 — сферические кривые, на паре (A_4) и (A_2) — это окружности — образующие каналовой поверхности (A_4). Следовательно, это семейство на трех фокальных поверхностях (A), (A_2) и (A_4) является линиями кривизны, и соответствующая четверка этих линий лежит на одной сфере S_2 — главной сфере поверхностей (A_4) и (A_2).*

Теорема 7. *Фокальная поверхность (A) конгруенции B_1 есть поверхность, у которой одно семейство линий кривизны $\omega^2=0$ — сферические кривые, лежащие на нормальной поверхности сфере.*

Эти поверхности определяются условием $[\omega^2\omega_2^0]=0$ и существуют с произволом четырех функций одного аргумента.

Справедлива и обратная теорема.

5. Конгруенции K являются частным случаем конгруенций K_1 при $b_3^0=0$.

Результаты настоящей работы позволяют усилить некоторые теоремы о конгруенциях K и найти новые свойства и признаки циклических систем Рибокура.

Теорема 8. *Фокальные поверхности конгруенции K попарно огибают две конгруенции сфер; пара (A) и (A_3)—∞^2 сфер S_3, а пара (A_4) (A_2) — конгруенцию сфер $S_2 - a_1^2 S_3$.*

Обратно, если две пары фокальных поверхностей конгруенции окружностей попарно огибают две конгруенции сфер, причем точки прикосновения каждой сферы лежат на одной окружности конгруенции, то эта конгруенция — конгруенция K.

Циклические системы Рибокура определяются условиями $a_1^2 = q = 0$; $b_3^0 = 0$.

Теорема 9. *Две фокальные поверхности разных пар* (A) *и* (A_4) *или* (A_2) *и* (A_3) *конгруенции* R *в соответствующих точках ортогональны.*

Обратно, если две фокальные поверхности конгруенции в соответствующих точках ортогональны каждой из двух других фокальных поверхностей, то эта конгруенция есть конгруенция R *(циклическая система).*

Так как прямые — частный случай окружностей, то нормальные конгруенции прямых — частный случай циклических систем Рибокура, и из изложенных теорем следуют классические свойства нормальных конгруенций прямых.

Поступило
12 IX 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Р. М. Гейдельман, ДАН, 66, № 2 (1949). [2] С. П. Фиников, Метод Картана, 1948.