Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXX, № 3

МАТЕМАТИКА

Е. А. БАРБАШИН

ОБ ОДНОМ УСЛОВИИ СУЩЕСТВОВАНИЯ СЕКУЩЕЙ ПОВЕРХНОСТИ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 23 XI 1949)

Пусть M_n — n-мерное ориентируемое замкнутое многообразие класса C_3 с локальными координатами $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Мы предположим, что все рассматриваемые далее функции принадлежат по меньшей мере классу C_2. Рассмотрим на M_n систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = X^i(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{1}$$

где правые части нужно понимать как координаты некоторого контрвариантного векторного поля.

Дифференциальную форму $\omega = \sum_{i=1}^{n} P_i dx_i$ назовем замкнутой, если $\partial P_i / \partial x_k = \partial P_k / \partial x_i$ всюду на M_n.

Дифференциальную форму назовем допустимой (относительно системы (1)), если $\omega_t = \sum_{i=1}^{n} P_i X^i > 0$ всюду на M_n.

Замкнутое множество F из M_n назовем секущей поверхностью, если после некоторой замены времени $dt' = \theta(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dt$ в системе (1) (где $\theta(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ скалярная непрерывная и всюду положительная функция) всякая точка из M_n будет периодически попадать на F через одинаковый для всех точек промежуток времени.

Согласно очевидному замечанию Биркгофа ([1]), достаточным условием существования секущей поверхности является наличие угловой координаты φ, обладающей замкнутым допустимым дифференциалом. Таким образом, условие Биркгофа содержит предварительное требование существования угловой координаты.

Назовем периодом замкнутой формы ω значение интеграла $\int_c \omega$, взятого по какому-либо одномерному циклу c многообразия M_n. Очевидно, периоды замкнутой формы ω образуют группу, и ранг этой группы мы назовем рангом дифференциала ω. Легко доказывается, что ранг дифференциала угловой координаты φ не превосходит 1.

В самом деле, если $\varphi(p_0) = 0$ и p — произвольная точка, то интегралы $\int d\varphi$, взятые по различным путям, ведущим из p_0 в p, могут отличаться лишь на величину, кратную 2π. Следовательно, значение интеграла $\int d\varphi$, взятого по любому циклу, кратно 2π. Таким образом, группа периодов данного интеграла изоморфна в этом случае некоторой подгруппе аддитивной группы целых чисел и, следовательно, ранг этой группы не превосходит 1.

Но из теории Рама ([2]) следует, что на M_n существуют дифференциалы всех рангов от 0 до β включительно, где β — одномерное число Бетти многообразия M_n. Таким образом, подавляющее большинство замкнутых дифференциалов имеют ранг выше первого и, следовательно, не могут быть дифференциалами угловой координаты. Оказывается, тем не менее, что существование допустимого замкнутого дифференциала любого ранга обеспечивает наличие секущей поверхности.

Теорема 1. *Если динамическая система обладает замкнутым допустимым дифференциалом, то она имеет секущую поверхность.*

Дифференциал ω назовем гомологичным нулю, если существует скалярная функция f на M_n такая, что $df = \omega$.

Пусть β одномерных циклов $c_1, c_2, \ldots, c_\beta$ образуют базу слабой гомологии многообразия M_n; отнесем каждому замкнутому дифференциалу ω группу чисел $a_i = \int\limits_{c_i} \omega$, $i = 1, 2, \ldots, \beta$; эти числа мы будем называть координатами ω. Из теорем Рама следует, что замкнутый дифференциал тогда и только тогда гомологичен нулю, когда его координаты равны нулю. Кроме того, Рам показал, что для любой системы β чисел существует замкнутый дифференциал, имеющий данные числа своими координатами. Таким образом каждому замкнутому дифференциалу ставится в соответствие определенный вектор β-мерного векторного пространства R_β.

Итак, пусть существует допустимый замкнутый дифференциал $\omega = \sum\limits_{i=1}^{n} P_i dx_i$. Существует положительное число m такое, что $\omega_t = \sum\limits_{i=1}^{n} P_i X^i > m$. Покажем, что дифференциал ω негомологичен нулю. В самом деле, из общей теории динамических систем ([3]) следует существование в M_n устойчивой по Пуассону траектории J. Эта траектория не может выродиться в точку покоя, так как наличие точек покоя несовместимо с существованием допустимого дифференциала. Пусть p — какая-либо точка траектории J, выберем около p достаточно малую окрестность U. Так как интеграл $\int \omega$, взятый по любой дуге, лежащей в U, зависит лишь от концов пути интегрирования, то существует верхняя грань δ значений модуля этого интеграла. Так как траектория J устойчива по Пуассону, то существует число $T > \delta / m$ такое, что точка p, двигаясь по траектории J, попадает через промежуток времени T в окрестность U, заняв при этом положение точки q. Если теперь обозначить через c цикл, составленный из соответствующей дуги s_1 траектории, соединяющей точки p и q, и дуги s_2, соединяющей эти же точки, но лежащей в U, то будем иметь $\int\limits_{c} \omega = \int\limits_{s_1} \omega + \int\limits_{s_2} \omega$, откуда $\left| \int\limits_{c} \omega \right| > mT - \delta$. Так как $mT - \delta > 0$, то $\int\limits_{c} \omega > 0$, что и убеждает нас в негомологичности нулю дифференциала ω.

Выберем теперь $\beta - 1$ замкнутых дифференциалов $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{\beta-1}$ таким образом, чтобы никакая линейная комбинация $b_0\omega + b_1\omega_1 + \ldots + b_{\beta-1}\omega_{\beta-1}$ не была бы гомологичным нулю дифференциалом при

$\sum_{i=0}^{\beta-1} b_i^2 \neq 0$. Этим дифференциалам в пространстве R_β соответствует β линейно независимых векторов. Обозначим через N число, удовлетворяющее неравенствам:

$$|\omega_{il}| < N, \quad i = 1, 2, \ldots, \beta - 1.$$

Пусть $k > m / N$, тогда дифференциалы ω, $\overline{\omega}_i = k\omega + \omega_i$, $i = 1, 2, \ldots$ $\ldots, \beta - 1$, будут допустимыми и линейно независимыми. Легко сообразить, что будут допустимыми и все дифференциалы вида

$$t_0\omega + \sum_{i=1}^{\beta-1} t_i \overline{\omega}_i, \quad \text{где } t_i \geqslant 0 \text{ и } \sum_{i=0}^{\beta-1} t_i^2 \neq 0;$$

совокупности этих дифференциалов соответствует на R_β полупространство P, содержащее внутреннюю точку, ибо оно порождено β линейно независимыми векторами. Теперь уже очевидно, что в P имеется вектор с рациональными координатами, а этому вектору соответствует допустимый дифференциал первого ранга.

Остается доказать теперь, что замкнутый допустимый дифференциал первого ранга является дифференциалом с точностью до постоянного множителя некоторой угловой координаты φ. Так как группа периодов дифференциала ω есть группа первого ранга с конечным числом образующих, то она является бесконечной циклической группой. Обозначим через γ образующую этой группы. Определим функцию $\varphi(p)$, полагая $\varphi(p_0) = 0$ для некоторой фиксированной точки p_0 и $\varphi(p) = \frac{2\pi}{\gamma} \int_{p_0 p} \overline{\omega}$ для любой другой точки, соединенной путем $p_0 p$ с точкой p. Очевидно, функция $\varphi(p)$ будет многозначной, но так как значение интеграла $\int \overline{\omega}$ по любому циклу кратно γ, то значения функции в точке p отличаются друг от друга тоже на число, кратное 2π. Итак, φ является угловой координатой, и теорема доказана.

Нужно отметить, что попытка Биркгофа ([1]) построить аналитическую угловую координату при наличии аналитической секущей поверхности оказалась неудачной. Построенная угловая координата, как указывают редакторы русского перевода цитированной книги, не имеет даже первых производных в точках самой секущей поверхности.

Нами доказана следующая

Теорема 2. *Если динамическая система обладает секущей поверхностью (которая может и не быть гладкой), то существует допустимая дифференциальная форма.*

Указанная в теореме 2 форма оказывается по построению дифференциалом угловой координаты. Таким образом, при наличии секущей поверхности динамическая система будет обладать также и дифференцируемой (класса C_2) угловой координатой.

Доказательство теоремы 2 существенно опирается на следующую теорему, являющуюся обращением теоремы 1 нашей заметки ([4]).

Теорема 3. *Если динамическая система дисперсивна, то существует функция u, производная которой по времени удовлетворяет условию*

$$\frac{du}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} X^i = 1.$$

Поступило
19 XI 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Дж. Д. Биркгоф, Динамические системы, 1941, стр. 124. [2] G. de Rham, Journ. Math. pures et appl. (9), 10, 165 (1931). [3] В. В. Немыцкий и В. В. Степанов, Качественная теория дифференциальных уравнений, 1947, гл. 4. стр. 276 [4] Е. А. Барбашин, ДАН, 61, № 2 (1948).