Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXX, № 2

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

А. М. КУСКОВ

ДИФРАКЦИЯ УПРУГИХ УСТАНОВИВШИХСЯ КОЛЕБАНИЙ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 20 X 1949)

Рассматривается трехмерная задача стационарной теории упругости. Среда предполагается однородной, изотропной и заполняющей внешность некоторой замкнутой поверхности. Уравнения стационарной динамической теории упругости сводятся к системе колебательных уравнений для скалярного потенциала φ и векторного потенциала $\overline{\psi}(\psi_1, \psi_2, \psi_3)$:

$$\Delta\varphi + k_1^2\varphi = 0,$$
$$\Delta\overline{\psi} + k_2^2\overline{\psi} = 0, \tag{1}$$

где k_1 и k_2 — некоторые постоянные, связанные с частотой колебаний ω соотношениями:

$$k_1 = \omega\sqrt{\frac{\rho}{\lambda + 2\mu}}, \quad k_2 = \omega\sqrt{\frac{\rho}{\mu}},$$

в которых ρ означает плотность среды, а λ и μ — постоянные Ляме.

Мы будем предполагать, что на границе упругой среды заданы напряжения. Тогда задача сводится к интегрированию системы (1) при граничных условиях:

$$\rho\omega^2\Big[\frac{\cos n_0 x}{k_1^2}\Delta\varphi + \frac{\cos n_0 y}{k_2^2}\Big(2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2\psi_3}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\psi_2}{\partial y\,\partial z} + \frac{\partial^2\psi_1}{\partial x\,\partial z} - \frac{\partial^2\psi_3}{\partial x^2}\Big) +$$
$$+ \frac{\cos n_0 z}{k_2^2}\Big(2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial z} + \frac{\partial^2\psi_3}{\partial y\,\partial z} - \frac{\partial^2\psi_2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\psi_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\psi_1}{\partial x\,\partial y}\Big) -$$
$$- 2\frac{\cos n_0 x}{k_2^2}\Big(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\psi_2}{\partial x\,\partial z} - \frac{\partial^2\psi_3}{\partial x\,\partial y}\Big)\Big]\Big|_s = f_1(N_0),$$

$$\rho\omega^2\Big[\frac{\cos n_0 x}{k_2^2}\Big(2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2\psi_3}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\psi_2}{\partial y\,\partial z} + \frac{\partial^2\psi_1}{\partial x\,\partial z} - \frac{\partial^2\psi_3}{\partial x^2}\Big) +$$
$$+ \frac{\cos n_0 y}{k_1^2}\Delta\varphi + \frac{\cos n_0 z}{k_2^2}\Big(2\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\,\partial z} + \frac{\partial^2\psi_1}{\partial z^2} - \frac{\partial^2\psi_3}{\partial x\,\partial z} + \frac{\partial^2\psi_2}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2\psi_1}{\partial y^2}\Big) -$$
$$- 2\frac{\cos n_0 y}{k_2^2}\Big(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\psi_3}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2\psi_1}{\partial y\,\partial z}\Big)\Big]\Big|_s = f_2(N_0),$$

$$\rho\omega^2\left[\frac{\cos n_0 x}{k_2^2}\left(2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial z}+\frac{\partial^2\psi_3}{\partial y\,\partial z}-\frac{\partial^2\psi_2}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x\,\partial y}\right)+\right.$$

$$+\frac{\cos n_0 y}{k_2^2}\left(2\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\,\partial z}+\frac{\partial^2\psi_1}{\partial z^2}-\frac{\partial^2\psi_3}{\partial x\,\partial z}+\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x\,\partial y}-\frac{\partial^2\psi_1}{\partial y^2}\right)+$$

$$\left.+\frac{\cos n_0 z}{k_1^2}\Delta\varphi-2\frac{\cos n_0 z}{k_2^2}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi_1}{\partial y\,\partial z}-\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x\,\partial z}\right)\right]\Bigg|_s=f_3(N_0), \quad (2)$$

где $f_1(N_0)$, $f_2(N_0)$, $f_3(N_0)$ суть заданные функции точки N_0 поверхности s, а n_0 — направление внешней нормали к поверхности s в этой точке.

Так как решается задача для области, содержащей бесконечно удаленную точку, то потенциалы φ и $\overline{\psi}$ должны еще удовлетворять условиям излучения.

Введем обозначения:

$$F=\iint_s \nu(N)\frac{\cos rx\cos n_0 y}{r^2}\,ds_N,$$

$$G=\iint_s \nu(N)\frac{\cos^2 rx\cos n_0 r}{r^2}\,ds_N, \quad (3)$$

$$H=\iint_s \nu(N)\frac{\cos rx\cos ry\cos n_0 r}{r^2}\,ds_N.$$

Здесь $\nu(N)$ — некоторая функция точки N поверхности s; r — расстояние от точки $N(\xi,\eta,\zeta)$ до точки $M(x,y,z)$, лежащей вне поверхности s; $r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}$; n_0 — направление внешней нормали к поверхности s в точке $N_0(\xi_0,\eta_0,\zeta_0)$ поверхности.

Если s — замкнутая поверхность, удовлетворяющая условиям Ляпунова с показателем 1, то для потенциалов (3) можно доказать справедливость следующих предельных формул:

$$F_e=F^0; \qquad F_i=F^0;$$

$$G_e=G^0-\frac{2\pi}{3}\nu(N_0); \qquad G_i=G^0+\frac{2\pi}{3}\nu(N_0); \quad (4)$$

$$H_e=H^0; \qquad H_i=H^0.$$

В формулах (4) значок e при потенциале означает предел соответствующего потенциала, когда точка M стремится к точке N_0, оставаясь все время вне поверхности s, а значок i при потенциале означает предельное выражение соответствующего потенциала, когда точка M неограниченно приближается к точке N_0 поверхности, находясь все время внутри поверхности.

Верхний индекс 0 при потенциале показывает, что в выражении соответствующего потенциала координаты точки M прямо заменены на координаты точки N_0.

Потенциалы (3) взяты в качестве образцов, лишь для определенности. Потенциалы, в которых содержатся углы между r или n_0 с другими осями координат, имеют предельные формулы, аналогичные (4).

Потенциалы φ и ψ будем искать в следующем виде:

$$\varphi = A \iint_s \left[\bar{\nu}(N), \operatorname{grad} \frac{e^{-ik_1 r}}{r} \right] dr_N,$$

$$\bar{\psi} = A \iint_s \left[\bar{\nu}(N), \operatorname{grad} \frac{e^{-ik_1 r}}{r} \right] ds_N, \tag{5}$$

где $A = \frac{1}{\pi\rho\omega^2}\left(\frac{k_2}{k_1}\right)^2$, а $\bar{\nu}(N)$ есть векторная плотность, подлежащая определению.

Заметим, что, в силу (5), потенциалы φ и $\bar{\psi}$ удовлетворяют условиям излучения.

Если подставить выражения (5) в (2), а затем устремить точку M к точке N_0 поверхности s (при этом придется воспользоваться формулами (4) и им подобными), то для компонентов $\nu_1(N)$, $\nu_2(N)$, $\nu_3(N)$ по осям координат плотности $\bar{\nu}(N)$ получится следующая система сингулярных интегральных уравнений:

$$B\nu_1(N_0) + \frac{1}{\pi}\iint_s \left\{ \frac{\nu_1(N)}{r_0^2}[\cos n_0 r_0 + b\cos^2 r_0 x \cos n_0 r_0] + \right.$$
$$+ \frac{\nu_2(N)}{r_0^2}[\cos r_0 x \cos n_0 y - \cos r_0 y \cos n_0 x + b\cos r_0 x \cos r_0 y \cos n_0 r_0] +$$
$$\left. + \frac{\nu_3(N)}{r_0^2}[\cos r_0 x \cos n_0 z - \cos r_0 z \cos n_0 x + b\cos r_0 x \cos r_0 z \cos n_0 r] \right\} ds_N +$$
$$+ L_1 = f_1(N_0),$$

$$B\nu_2(N_0) + \frac{1}{\pi}\iint_s \left\{ \frac{\nu_1(N)}{r_0^2}[\cos r_0 y \cos n_0 x - \cos r_0 x \cos n_0 y + \right.$$
$$+ b\cos r_0 x \cos r_0 y \cos n_0 r_0] + \frac{\nu_2(N)}{r_0^2}[\cos n_0 r_0 + b\cos^2 r_0 y \cos n_0 r_0] +$$
$$\left. + \frac{\nu_3(N)}{r_0^2}[\cos r_0 y \cos n_0 z - \cos r_0 z \cos n_0 y + b\cos r_0 y \cos r_0 z \cos n_0 r_0] \right\} ds_N +$$
$$+ L_2 = f_2(N_0),$$

$$B\nu_3(N_0) + \frac{1}{\pi}\iint_s \left\{ \frac{\nu_1(N)}{r_0^2}[\cos r_0 z \cos n_0 x - \cos r_0 x \cos n_0 z + \right.$$
$$+ b\cos r_0 x \cos r_0 z \cos n_0 r_0] + \frac{\nu_2(N)}{r_0^2}[\cos r_0 z \cos n_0 y - \cos r_0 y \cos n_0 z +$$
$$\left. + b\cos r_0 y \cos r_0 z \cos n_0 r_0] + \frac{\nu_3(N)}{r_0^2}[\cos n_0 r_0 + b\cos^2 r_0 z \cos n_0 r_0] \right\} ds_N +$$
$$+ L_3 = f_3(N_0). \tag{6}$$

Здесь $r_0 = \sqrt{(\xi_0 - \xi)^2 + (\eta_0 - \eta)^2 + (\zeta_0 - \zeta)^2}$; $B = -2\left(\frac{k_2}{k_1}\right)^2$; $b = 3\left[\left(\frac{k_2}{k_1}\right)^2 - 1\right]$; L_1, L_2, L_3 — вполне определенные интегральные операторы от $\nu_1(N)$, $\nu_2(N)$, $\nu_3(N)$, ядра этих операторов непрерывны.

Система (6) правильная ([1]), т. е. ее символический определитель никогда не обращается в нуль.

Заметим, что альтернатива Фредгольма доказана для правильных сингулярных интегральных уравнений, заданных на ограниченных замкнутых поверхностях, удовлетворяющих условиям Ляпунова и гомеоморфных сфере или тору.

В силу этого для области, ограниченной поверхностью s, удовлетворяющей только что указанным требованиям, система (6) однозначно разрешима для любых правых частей, если $\omega \neq \omega_n$, где ω_n — собственные числа сопряженной задачи, т. е. задачи стационарной теории упругости для внутренней области, когда на границе s заданы смещения.

Ленинградский государственный университет им. А. А. Жданова

Поступило 29 IX 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Г. Михлин, Усп. матем. наук, 3, в. 3 (1948).