Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXVIII, № 5

ЭЛЕКТРОТЕХНИКА

Академик В. С. КУЛЕБАКИН

О ПОВЕДЕНИИ НЕПРЕРЫВНО ВОЗМУЩАЕМЫХ АВТОМАТИЗИРОВАННЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

При исследовании процессов в автоматически действующих системах обычно ограничиваются рассмотрением поведения системы для следующих случаев: 1) при внезапном нарушении равновесия под действием какого-либо возмущающего импульса; 2) под влиянием так называемого стандартного возмущения, т. е. при внезапном изменении возмущения на конечную постоянную величину.

Между тем, для современной практики приобретает существенное значение знание поведения системы под влиянием непрерывно действующих возмущающих сил, в определенном отрезке времени, при переходе от одной стационарной нагрузки к другой.

Многие процессы в автоматизированных системах могут описываться с достаточным приближением при помощи линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Описанию поведения таких, т. е. линеаризированных систем, находящихся под непрерывным действием ограниченных по модулю возмущающих сил, и посвящается настоящая работа.

Как известно, процессы в линейных системах со многими степенями свободы выражаются дифференциальными уравнениями ([1, 2]):

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = f(t), \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где n — число степеней свободы; x_1 — основная регулируемая величина, представляющая искомую функцию независимого переменного t (времени); x_i (для $i > 1$) — координаты остальных звеньев и участков системы; эти координаты также являются функциями независимого переменного t; a_{ij} — операторные многочлены с постоянными коэффициентами обычно второй степени относительно буквы; $f(t)$ — так называемая „нагрузка“, математически рассматриваемая как заданная непрерывная функция независимого переменного t с непрерывными же первыми производными до порядка $\mu(n)$ включительно; $\mu(n)$ натуральное число, зависящее только от n, определение которого указано дальше.

Мы предполагаем, что определитель системы (1)

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}, \tag{2}$$

являющийся многочленом от буквы D степени, самое большее, равной $2n$, не тождественен нулю, т. е.

$$\Delta \neq 0. \tag{3}$$

При условии (3) система (1) есть система совместная ([2]), т. е. имеющая решение: $\{x_1(t),\ x_2(t), \ldots,\ x_n(t)\}$, причем число произвольных постоянных, от которых зависит общее решение системы (1), в точности равно степени определителя Δ от буквы D.

Такая система путем элементарных операций (умножения уравнений на многочлены от буквы D, перестановки и сложения их) может быть преобразована в строго эквивалентную ей каноническую систему:

$$\begin{aligned} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \cdots\cdots &= c_1 f(t), \\ b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \cdots\cdots &= c_2 f(t), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{n1}x_1 + b_{n2}x_2 + \cdots + b_{nn}x_n &= c_n f(t), \end{aligned} \tag{4}$$

где b_{ij} суть некоторые операторы дифференцирования, т. е. многочлены от буквы D уже необязательно квадратичные, и c_i также суть операторные многочлены от D; вышеуказанное число $\mu(n)$ есть верхняя граница степеней всех этих многочленов для произвольных квадратичных операторов a_{ij} первоначальной системы (1).

Для того чтобы судить о характере поведения, например, основной регулируемой величины x_1, находящейся под влиянием нагрузки $f(t)$, желательно непрерывную функцию $c_1 f(t)$ изобразить аналитически в таком виде, который, с одной стороны, был бы удобен для исследования, и, с другой стороны, достаточно точно изображал бы процесс возмущения.

Принимая во внимание, что непрерывная функция $c_1 f(t)$ нам задана или написана нами самими по тому или иному закону, для получения нужного аналитического выражения, дающего апроксимацию с требуемой точностью, следует рассмотреть два случая: во-первых, когда $f(t)$ дана на фиксированном конечном отрезке $[a \leqslant t \leqslant b]$, и, во-вторых, когда $f(t)$ дана на полуоси $[a < t < +\infty]$.

В первом случае непрерывную функцию $c_1 f(t)$ можно апроксимировать на $[a \leqslant t \leqslant b]$ с требуемой точностью ε, $\varepsilon > 0$, или многочленом Чебышева — Вейерштрасса $P(t) = \sum\limits_{k=0}^{m} A_k t^k$, или тригонометрическим многочленом $T(t) = \sum\limits_{k=0}^{m} A_k \cos \omega_k t + B_k \sin \omega_k t$. Обозначая, краткости ради, то и другое апроксимативные выражения через $A(t)$, мы имеем $c_1 f(t) = A(t) + \theta\varepsilon$, где $|\theta| < 1$. Заменяя теперь в канонической системе (4) первое уравнение, дающее точное значение регулируемой величины x_1, через апроксимативное уравнение

$$b_{11}\xi_1 = A(t), \tag{5}$$

где ξ_1 — неизвестная функция, удовлетворяющая тем же самым начальным условиям, как и регулируемая величина x_1, т. е. $\xi_1(t_0) = x_1(t_0)$, $\xi_1'(t_0) = x_1'(t_0), \ldots$, и затем вычитая из точного уравнения апроксимативное, мы имеем дифференциальное уравнение

$$b_{11}\delta = \theta\varepsilon, \tag{6}$$

где δ обозначает разность $x_1 - \xi_1$ и, значит, является той погрешностью, которую мы совершаем в оценке регулируемой величины x_1 при переходе от точного уравнения (4) к апроксимативному (5). Заметим, что начальные условия для функции δ суть нулевые, т. е. $\delta(t_0)=0$, $\delta'(t_0)=0, \ldots$ Пользуясь методом, указанным А. Н. Крыловым [3], мы можем написать функцию как сумму различных выражений вида

$$e^{\alpha t}\frac{1}{(k-1)!}\int_{t_0}^{t}(t-s)^{k-1}e^{-\alpha s}\theta\varepsilon\,d\varepsilon \tag{7}$$

с численными множителями, зависящими лишь от коэффициентов многочлена (по D) b_{11}; здесь α есть корень характеристического уравнения $b_{11}(\alpha)=0$ и k — натуральное число, не превосходящее степени многочлена b_{11}.

Из выражения (7) мы заключаем, что имеем $|\delta|<M\varepsilon$, где M — положительное число, не зависящее от ε. Следовательно, ошибка при вычислении регулируемой величины x_1 по апроксимативному уравнению

$$b_{11}x_1 = A(t) \tag{5'}$$

не превосходит бесконечно малого первого порядка относительно заданной точности ε, с которою непрерывная функция $c_1f(t)$ апроксимирована через $A(t)$.

Во втором случае, предполагая непрерывную на всей полуоси $[0\leqslant t<+\infty]$ функцию $c_1f(t)$ стремящейся к нулю с возрастанием t, мы апроксимируем ее с заданной точностью ε, $\varepsilon>0$, на всей полуоси посредством конечной суммы $A(t)=\sum\limits_{k=0}^{m}A_ke^{\lambda_kt}$, где A_k суть численные коэффициенты и λ_k — числа с отрицательными действительными частями. Возможность такой апроксимации всякой непрерывной функции $\Phi(t)$, $\lim\limits_{t\to+\infty}\Phi(t)=0$, усматривается немедленно, когда вводят преобразование $z=e^{-t}$. В самом деле, в указанных условиях функция $\Phi(t)= =\Phi(\log 1/z)=\Omega(z)$ есть непрерывная функция на замкнутом отрезке $[0\leqslant z\leqslant 1]$, уничтожающаяся в точке $z=0$. Поэтому ее можно апроксимировать многочленом Чебышева — Вейерштрасса $P(t)=\sum\limits_{k=1}^{m}A_kz^k$, уничтожающимся в точке $z=0$, $|\Omega(z)-P(z)|<\varepsilon$. Возвращаясь к переменному t, мы имеем $\left|\Phi(t)-\sum\limits_{k=1}^{m}A_ke^{-kt}\right|<\varepsilon$ на всей полуоси $[0\leqslant t<+\infty]$.

Таким образом, как и в первом случае, мы здесь имеем $c_1f(t)= =A(t)+\theta\varepsilon$, где $|\theta|<1$, на всей полуоси. Далее, все рассуждения, проделанные для первого случая, применимы и здесь; это дает нам апроксимативное уравнение (5) и погрешность δ, определяемую дифференциальным уравнением (6). Наконец, к такому же результату приводит и окончательная оценка выражения (7). В самом деле, переписав его в виде $\frac{1}{(k-1)!}\int\limits_{t=0}^{t}(t-s)^{k-1}e^{\alpha(t-s)}\theta\varepsilon\,d\varepsilon$ и положив $t-s=y$, мы находим $\frac{1}{(k-1)!}\int\limits_{0}^{t-t_0}y^{k-1}e^{\alpha y}\theta\varepsilon\,d\varepsilon$. Начальная точка t_0 произвольна; полагая $t_0=0$, беря вместо α его действительную часть α', которая отрицательна, и, наконец, принимая $\theta=1$ и $t\to+\infty$, мы замечаем, что выражение (7) по модулю не превосходит

$$\frac{\varepsilon}{(k-1)!}\int\limits_0^{+\infty} y^{k-1} e^{\alpha' y}\,dy = \frac{\varepsilon}{(-\alpha')^k}\,.$$

Отсюда мы заключаем, что и в случае полуоси $[0 \leqslant t < +\infty]$ ошибка δ, совершаемая при вычислении регулируемой величины x_1, по апроксимативному уравнению $b_{11}x_1 = A(t)$ не превосходит $M\varepsilon$, где M — константа, не зависящая от ε, и где имеем неравенство $|c_1 f(t) - A(t)| < \varepsilon$ по длине всей полуоси.

Заметим теперь следующее важное обстоятельство: во всех рассмотренных нами случаях апроксимирующее выражение $A(t)$ является решением однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

$$F(D)\,A(t) = 0, \tag{8}$$

где $F(D)$ — операторный многочлен. Вследствие этого, проделывая над обеими частями апроксимативного уравнения $b_{11}x_1 = A(t)$ операцию $F(D)$ и обозначая через $K(D)$ произведение двух операторов $F(D) \times b_{11}$, $K(D) = F(D)b_{11}$, мы имеем важное уравнение

$$K(D)\,x_1 = 0. \tag{9}$$

Естественно, порядок уравнения (9) должен быть выше порядка первоначального неоднородного дифференциального уравнения (5), а именно, на порядок дифференциального уравнения (8), общим решением которого апроксимируется нагрузка или возмущение $f(t)$. На эту величину повышается порядок и всей системы (1), если первое уравнение в ней, путем указанных выше операций дифференцирования, привести к однородному.

Все это дает основание для следующего предложения:

Теорема. *Процессы в линейных автоматических системах, находящихся под действием непрерывного возмущения, могут быть описаны с любой степенью точности однородным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами, и это не только на конечном отрезке* $[a \leqslant t \leqslant b]$ *времени, но и на всей полуоси времен* $[0 \leqslant t < +\infty]$.

В большинстве практически важных случаев апроксимирующее выражение $A(t)$ описывается дифференциальным уравнением (8), где операторный многочлен $F(D)$ совсем не имеет корней с положительной реальной частью. В этих условиях движение регулируемой системы подпадает под действие формулированной теоремы.

Подобная интерпретация, предложенная мною еще в 1940 г. ([1]), а также указанные выше методы приведения системы с неоднородными дифференциальными уравнениями к эквивалентным системам однородных дифференциальных уравнений, но более высокого порядка, находят применение при решении различных задач при помощи интеграторов (электрических, механических) ([4], [5]), а также при исследовании вопросов автоматического регулирования.

Поступило
17 VIII 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. С. Кулебакин, Автоматика и телемеханика, № 4, 6 (1940). [2] Н. Н. Лузин, Автоматика и телемеханика, № 5 (1940). [3] А. Н. Крылов, О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, 1932, стр. 35. [4] Н. В. Корольков и Г. К. Кузьминок, Изв. АН СССР, ОТН, № 4 (1948). [5] В. Буш и С. Колдвелл, Усп. матем. наук, 1, в. 5—6 (1946).