Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXVIII, № 5

ТЕХНИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Б. Я. ЛЮБОВ

ВЫЧИСЛЕНИЕ СКОРОСТИ ЗАТВЕРДЕВАНИЯ МЕТАЛЛИЧЕСКОГО СЛИТКА

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 8 VIII 1949)

Расположение столбчатых кристаллов в горизонтальном сечении металлических слитков показывает, что тепловой поток в течение основного этапа затвердевания слитка направлен перпендикулярно к его поверхности. Последнее обстоятельство позволяет рассматривать задачу определения скорости затвердевания квадратного или прямоугольного металлического слитка как линейную (температура в слитке $T(x,\ t)$). Анализ теплового баланса затвердевающего слитка приводит к выводу, что теплота перегрева при кристаллизации металла в изложнице играет значительно меньшую роль, чем скрытая теплота перехода расплав — твердый металл.

Следовательно, в качестве начального условия можно принять

$$T(0,\ 0) = T_k, \tag{1a}$$

T_k — температура кристаллизации металла.

Температурное поле в затвердевшем металле описывается уравнением

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{a}\,\frac{\partial T}{\partial t}. \tag{2a}$$

Температура поверхности слитка меняется во времени по некоторому закону

$$T(0,\ t) = f_0(t). \tag{3a}$$

На границе расплав — твердый металл $(x = y_0(t))$ имеет место тепловой баланс

$$Q_0 \rho \frac{dy_0(t)}{dt} = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=y_0(t)}, \tag{4a}$$

Q_0 — теплота кристаллизации на 1 г, ρ — удельный вес, λ — теплопроводность металла.

Кроме того

$$T[y_0(t),\ t] = T_k. \tag{5a}$$

Если принять, что толщина слитка равна $2l$, то $0 \leqslant x \leqslant l$, $0 \leqslant t \leqslant t_0$, где $y_0(t_0) = l$.

Введем безразмерные величины

$$\tau = \frac{at}{l^2}, \quad \theta = \frac{T}{T_k}, \quad z = \frac{x}{l}, \quad y(t) = \frac{y_0(t)}{l}.$$

Тогда

$$\theta(0, 0) = 1, \tag{1б}$$

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2} = \frac{\partial\theta}{\partial\tau}, \tag{2б}$$

$$\theta(0, \tau) = \frac{f_0(t)}{T_k} = f(\tau), \tag{3б}$$

$$Q\frac{dy(\tau)}{d\tau} = -\left(\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)_{z=y(\tau)}, \tag{4б}$$

$$\theta[y(\tau), \tau] = 1. \tag{5б}$$

Здесь безразмерная величина $Q = q/T_k$, $q = Q_0/c$, c — теплоемкость металла.

Введем новую переменную

$$\xi = 1 - \frac{z}{y(\tau)}$$

и получим

$$V(0, 0) = 1, \tag{1в}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial\xi^2} = \psi(\tau)\frac{\partial V}{\partial\tau} + (1 - \xi)\frac{d\psi(\tau)}{2\,d\tau}\frac{\partial V}{\partial\xi}, \tag{2в}$$

$$V(1, \tau) = f(\tau), \tag{3в}$$

$$\frac{d\psi(\tau)}{d\tau} = -\frac{2}{Q}\left(\frac{\partial V}{\partial\xi}\right)_{\xi=0}, \tag{4в}$$

$$V(0, \tau) = 1, \tag{5в}$$

$$\psi(\tau) = y^2(\tau), \quad \theta(z, \tau) \equiv V(\xi, \tau).$$

Будем искать $V(\xi, \tau)$ в виде ряда

$$V(\xi, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\tau)\,\xi^n. \tag{6}$$

Из условий (4в), (5в) и уравнения (2в) следует:

$$a_0(\tau) = 1, \tag{7}$$

$$a_1(\tau) = -\frac{Q}{2}\frac{d\psi(\tau)}{d\tau}, \tag{8}$$

$$a_n(\tau) = \frac{\psi(\tau)}{n(n-1)}\frac{da_{n-2}(\tau)}{d\tau} + \frac{\frac{d\psi(\tau)}{d\tau}}{2n(n-1)}\left[(n-1)\,a_{n-1}(\tau) - (n-2)\,a_{n-2}(\tau)\right], \quad n \geqslant 2. \tag{9}$$

Для определения $\psi(\tau)$ остается условие (3в)

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(\tau) = f(\tau). \tag{10}$$

Воспользовавшись рекуррентным соотношением (9) и приняв во внимание (7), (8), получим из (10)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n! 1\cdot 3\cdot 5\ldots (2n-1)} \frac{d^n}{d\tau^n} \psi^n(\tau) = \frac{1-f(\tau)}{Q}. \tag{11}$$

Представим $\psi(\tau)$ в виде ряда по степеням параметра $1/Q$:

$$\psi(\tau) = \frac{1}{Q}\psi_1(\tau) + \frac{1}{Q^2}\psi_2(\tau) + \cdots \tag{12}$$

Путем подстановки (12) в (11) и сравнения коэффициентов при одинаковых степенях $1/Q$ получим ряд уравнений для определения $\psi_1(\tau)$, $\psi_2(\tau)$, ... Окончательно:

$$\psi(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} (-)^{n-1} C_{n-1} \frac{d^{n-1}}{d\tau^{n-1}} \left(2\int_0^{\tau} \frac{1-f(\eta)}{Q}\, d\eta\right)^n, \tag{13}$$

$$C_0 = 1,\ C_1 = \frac{1}{12},\quad C_2 = \frac{7}{1080},\quad C_3 = \frac{79}{181440} \text{ и т. д.}$$

Не рассматривая здесь вопроса о сходимости ряда (13) для $0 \leqslant \tau \leqslant \tau_0$, где $y(\tau_0) = 1$, в общем случае, заметим, что при конкретном задании $f(\tau)$ исследование сходимости производится обычными методами.

Пусть, например,

$$f(\tau) = 1 - \alpha\tau^m, \quad m \geqslant 0, \tag{14}$$

$$\psi(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} (-)^{n-1} C_{n-1}\left[\frac{2\alpha}{Q(m+1)}\right]^n \frac{d^{n-1}}{d\tau^{n-1}} \tau^{mn+n} =$$

$$= \tau \sum_{n=1}^{\infty} (-)^{n-1} C_{n-1} (mn+n)(mn+n-1)\ldots(mn+2) \left[\frac{2\alpha\tau^m}{Q(m+1)}\right]^n. \tag{15}$$

Следует отметить, что, рассматривая начальную фазу кристаллизации слитка, можно принять $\alpha\tau^m < Q$.

Если $m = 0$, то

$$\psi(\tau) = \tau \sum_{n=1}^{\infty} (-)^{n-1} C_{n-1} n! \left(\frac{2\alpha}{Q}\right)^n = \tau\left[\frac{2\alpha}{Q} - \frac{1}{6}\left(\frac{2\alpha}{Q}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{7}{180}\left(\frac{2\alpha}{Q}\right)^3 - \frac{79}{7560}\left(\frac{2\alpha}{Q}\right)^4 + \cdots\right]. \tag{16}$$

Из (16) следует, что $\psi(\tau) = \gamma\tau$, $\gamma = \mathrm{const}$. Воспользовавшись формулами обращения степенных рядов, получим

$$\gamma + \frac{\gamma^2}{6} + \frac{\gamma^3}{60} + \frac{\gamma^4}{840} + \frac{\gamma^5}{15120} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma^n}{2^{n-1} 1\cdot 3\cdot 5\ldots (2n-1)} =$$

$$= \sqrt{\pi\gamma}\, e^{\gamma/4} \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{\gamma}}{2}\right) = 2\frac{\alpha}{Q}, \tag{17}$$

$$\operatorname{erf}\omega = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\omega} e^{-\zeta^2} d\zeta.$$

Выражение (17) является известным трансцендентным уравнением, определяющим γ (1). Следовательно,

$$y(\tau) = \sqrt{\psi(\tau)} = \sqrt{\gamma\tau} = 2\beta\sqrt{\tau}, \quad \gamma = 4\beta^2. \tag{18}$$

Приложение полученного решения задачи к исследованию процесса кристаллизации стального слитка при различных режимах охлаждения его поверхности будет нами рассмотрено в другом месте.

В заключение отметим, что изложенный метод может быть применен к рассмотрению различных процессов, идущих с изменением агрегатного состояния вещества.

Центральный научно-исследовательский
институт черной металлургии

Поступило
1 VII 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. Я. Гранат и А. К. Жегалов, Кристаллизация и строение стального слитка, Л.—М., 1935.