Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXX, № 2

МАТЕМАТИКА

А. Г. ШКОЛЬНИК

ЛИНЕЙНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 5 XI 1949)

1. В настоящей статье даются условия совместности и независимости системы линейных неравенств и исследуется характер решений таких систем. Линейными неравенствами занимались Минковский(1) и, в особенности, Вороной(2), рассматривавший, в качестве базы для своих исследований по квадратичным формам, области в n-мерном пространстве, определяемые линейными неравенствами. Автором этой статьи были установлены (3) условия, при которых система $n+1$ линейных неравенств с n неизвестными имеет ограниченное решение. Вопросу совместности системы линейных неравенств была посвящена статья С. Н. Черникова (4).

В основе применяемого в настоящей работе метода лежит очень простая мысль: линейное неравенство $\sum a_i x_i + a_0 \geqslant 0$ равносильно уравнению $\sum a_i x_i = s - a_0$, где s — неотрицательный параметр.

2. Возьмем систему $r+1$ линейных неравенств с n неизвестными ранга r:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ki} x_i + a_{k0} \geqslant 0 \quad (k = 1, 2, \ldots r+1) \tag{1}$$

и введем понятие ее характеристики χ следующим образом. Предполагая, что определитель $D = \begin{vmatrix} a_{11} \ldots a_{1r} \\ \cdots\cdots \\ a_{r1} \ldots a_{rr} \end{vmatrix}$ не равен нулю, рассматриваем знаки характеристического определителя:

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1r} & a_{10} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{r1} & \ldots & a_{rr} & a_{r0} \\ a_{r+1,1} & \ldots & a_{r+1,r} & a_{r+1,0} \end{vmatrix}$$

и адъюнкт элементов столбца свободных членов в δ — характеристических адъюнкт:

$$\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_r, \Delta_{r+1} \ (= D). \tag{2}$$

Тогда, если $\delta \neq 0$, то χ — число адъюнкт Δ_i, знаки которых совпадают со знаком δ, а если $\delta = 0$, то χ — число контрастов в ряду характеристических адъюнкт Δ_i, т. е. число адъюнкт, знаки которых противоположны тому, который имеет не менее половины значащих членов ряда (2).

Пользуясь введенным таким образом понятием характеристики, можно доказать следующее утверждение:

Теорема 1. *Для того чтобы система $r+1$ линейных неравенств с n неизвестными ранга r была совместной и имела невырожденное (n-мерное) решение, необходимо и достаточно, чтобы ее характеристика χ была отлична от нуля.*

При $\chi=0$ и $\delta\neq 0$ система несовместна, а при $\chi=0$ и $\delta=0$ имеет вырожденное решение (система строгих неравенств несовместна и в этом последнем случае).

Система из r неравенств ранга r всегда совместна — решением ее служит r-гранный угол. Когда число неравенств в системе превышает ее ранг более чем на единицу, надлежит рассмотреть характеристики всех ее главных подсистем (мы называем главной всякую подсистему из $k+1$ неравенств ранга k).

В этом случае имеет место следующее предложение:

Теорема 2. *Для того чтобы система линейных неравенств была совместной и имела n-мерное решение, необходимо и достаточно, чтобы характеристики всех ее главных подсистем были не равны нулю.*

При применении этого критерия рассматривают сначала высшие главные подсистемы (по $r+1$ неравенств), и если все они ранга r, то вопрос разрешается рассмотрением их характеристик; если же какая-либо из этих подсистем окажется ранга меньше r, то надо рассмотреть характеристики ее главных подсистем, и т. д.

Из установленного нами критерия совместности можно вывести следствие, что система имеет n-мерное решение в том и только в том случае, когда между неравенствами не существует тождественного соотношения вида:

$$\rho_0+\sum_k \rho_k\left(a_{k0}+\sum_i a_{ki}x_i\right)=0, \quad \rho_k\geqslant 0. \tag{3}$$

В такой форме это положение в качестве «фундаментального принципа» было сформулировано Вороным (²).

Если в системе неравенств одно из неравенств удовлетворяется всеми совместными решениями остальных неравенств системы, то мы скажем, что это неравенство подчинено остальным неравенствам. Геометрически в этом случае соответствующее полупространство включает в себя пересечение остальных полупространств. Если в системе одно или несколько неравенств являются подчиненными, то система зависима; если таких неравенств нет, то независима.

Критерий зависимости системы $r+1$ неравенств ранга r формулируется следующим образом:

Теорема 3. *Система $r+1$ линейных неравенств ранга r зависима в том и только в том случае, когда характеристика ее $\chi=1$.*

При этом подчинённым при $\delta\neq 0$ является неравенство, соответствующее адъюнкте, знак которой совпадает со знаком δ, а при $\delta=0$ — неравенство, соответствующее контрастирующей адъюнкте.

В случае систем с числом неравенств, большим $r+1$, рассматриваются характеристики главных подсистем.

Теорема 4. *Для того чтобы система линейных неравенств была независимой, необходимо и достаточно, чтобы характеристики всех ее главных подсистем были не равны* 1.

В случае зависимой системы можно обнаружить подчиненные неравенства и их отбросить.

3. Переходя к исследованию системы неравенств:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ki}x_i + a_{k0} \geqslant 0 \quad (k=1, 2, \ldots, m), \tag{4}$$

которую мы можем считать независимой, заменяем ее равносильной ей системой уравнений

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ki}x_i = s_k - a_{k0} \quad (s_k \geqslant 0; \quad k=1, 2, \ldots, m). \tag{5}$$

Предполагая ранг системы равным r, получаем по обычным правилам решение, которое будет линейно зависеть от $n-r$ произвольных параметров t_i и от r неотрицательных параметров s_k, причем на параметры s_k налагаются еще ограничения, вытекающие из требования совместности системы (равенство нулю характеристических определителей системы (5)).

В результате приходим к выводу, что параметры s_k и t_i, через которые линейно выражается решение данной системы неравенств (4), должны удовлетворять условиям:

$$-\infty < t_i < \infty \quad (i=1, 2, \ldots, n-r); \qquad s_k \geqslant 0 \quad (k=1, 2, \ldots, r);$$
$$\frac{1}{D}\left(-\Delta_1^{(j)}s_1 - \Delta_2^{(j)}s_2 - \ldots - \Delta_r^{(j)}s_r + \delta^{(j)}\right) \geqslant 0 \quad (j=r+1, \ldots, m). \tag{6}$$

Неравенства (6) определяют область пространства $(s_1, \ldots, s_r, t_1, \ldots, t_{n-r})$, и поскольку эта область представляет аффинное невырожденное преобразование области (4) пространства P^n, мы можем судить о характере последней по ее отображению (6).

Исследование приводит к следующим результатам.

I. Если число (независимых) неравенств равно рангу системы $m=r$, решение — r-гранный угол в P^n. Его низшая $(n-r)$-мерная грань («$n-r$)-мерная вершина») является вместе с тем решением соответствующей, «граничной» системы уравнений:

$$\sum a_{ki}x_i + a_{h0} = 0 \quad (k=1, \ldots, m). \tag{7}$$

В частности, при $r=n$ решение — n-гранный угол, вершина которого представляет решение граничной, в рассматриваемом случае — крамеровской, системы уравнений.

II. Если $m=r+1$ и характеристика $\chi > 1$, решение — $(r+1)$-гранная область. При этом, если $r=n$, то при $\delta \neq 0$ решение — $(n+1)$-гранная область P^n, имеющая χ вершин $(2 \leqslant \chi \leqslant n+1)$, в частности, при $\chi = n+1$ получаем n-мерный тетраэдр; при $\delta = 0$ решение — $(n+1)$-гранный угол (гоноэдр) [5]. Если же $r<n$, решение — призматическая область, о характере которой судим, рассматривая ее проекцию в r-мерное подпространство (положив $t_i = 0$).

В том случае, когда характеристика $\chi = 0$ и $\delta \neq 0$, система несовместна, а если $\chi = 0$ и $\delta = 0$, система имеет вырожденное решение, а именно, если среди характеристических адъюнкт Δ_i k $(k<r)$ равно нулю, — k-гранный угол в пространстве $P^{n-(r-k)}$.

III. Когда число неравенств $m > r+1$ (и все характеристики главных подсистем $\neq 0$), решение — m-гранная область в P^n. Когда решение будет многогранником, т. е. ограниченным? В случае II это имело место лишь при $r=n$ и $\chi = n+1$. Условие $r=n$ является необходимым для существования ограниченного решения. Достаточно, если при этом хотя бы одна из характеристик главных подсистем достигает значения, равного $n+1$. Условие это не является необходимым.

Более общий достаточный критерий может быть высказан в такой форме:

Если для каждого значения k $(k = 1, \ldots, n)$ *среди рядов характеристических адъюнкт найдется такой, в котором знак* k*-й адъюнкты совпадает со знаком соответствующего характеристического определителя и главного определителя системы, а все остальные адъюнкты этого ряда имеют тот же знак либо равны нулю, то решение системы будет ограниченным.*

Этим требованиям, в частности, удовлетворяет система $2n$ неравенств, определяющая n-мерный параллелепипед (параллелотоп).

Поступило
31 X 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] H. Minkowski, Geometrie der Zahlen, 1896. [2] G. Voronoi, Journ. f. reine u. angew. Math., **133** (1908); **134** (1908); **136** (1909). [3] А. Г. Школьник, Уч. зап. физ.-мат. фак. МГПИ, **1** (1940). [4] С Н. Черников, Матем. сборн., **15** (57) : 3 (1944). [5] Б. Н. Делоне, Петербургская школа теории чисел, 1947, стр. 259.