Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXX, № 2

МАТЕМАТИКА

Н. Ф. СЕСЕКИН

К ТЕОРИИ СПЕЦИАЛЬНЫХ ГРУПП БЕЗ КРУЧЕНИЯ

(Представлено академиком О. Ю. Шмидтом 11 XI 1949)

В работе С. Н. Черникова (1) дана структура локально-конечных p-групп с условием минимальности для абелевых подгрупп. Структура групп с нормализаторным условием (будем такие группы, следуя О. Ю. Шмидту, называть специальными), все абелевы подгруппы которых удовлетворяют условию минимальности, также определяется результатом работы (1), так как все такие группы локально-конечны. Естественно поставить более широкий вопрос об изучении структуры смешанной специальной группы, все абелевы подгруппы которой конечного ранга*. В настоящей заметке показано, что специальная группа без кручения, все абелевы подгруппы которой конечного ранга, обладает конечным центральным рядом, все факторы которого абелевы группы без кручения конечного ранга.

1°. Группу G без кручения, в которой из $x^m = y^m$ следует $x = y$ для всяких x и y из G и любого натурального m („закон однозначного извлечения корня из элемента"), будем называть R-группой (2).

Лемма 1**. *Группа G без кручения с центральным рядом конечной длины есть R-группа.*

Доказательство. Пусть

$$1 = Z_0 \subset Z_1 \subset \ldots \subset Z_{n-1} \subset Z_n = G$$

верхний центральный ряд длины n группы G. Покажем, что из $x^m = y^m$, $x, y \in G$ и $m \neq 0$ следует $x = y$. Это верно для абелевых групп без кручения. Пусть лемма 1 уже доказана для групп без кручения класса не выше $n-1$. Нормальный делитель $H = \{Z_{n-1}, x\}$ группы G имеет, очевидно, класс не выше $n-1$, а потому будет R-группой. Но тогда в H из $x^m = (yxy^{-1})^m$ следует $x = yxy^{-1}$, и далее из $x^m = y^m$ и $(xy^{-1})^m = 1$ имеем $x = y$.

Теорема 1. *Специальная группа G без кручения является R-группой.*

Доказательство. Пусть $x^m = y^m$, где $m \neq 0$ и x, y — элементы из G, и $H = \{x, y\}$ — подгруппа из G, порожденная элементами x и y. Элемент $z = x^m = y^m$ содержится в центре подгруппы H. Фактор-группа $H/\{z\}$ есть конечная специальная группа. В самом деле, H и

* Смешанная абелева группа A имеет конечный ранг, если ее периодическая часть F удовлетворяет условию минимальности, а фактор-группа A/F конечного ранга.

** Доказана топологическим методом А. И. Мальцевым (6).

$H/\{z\}$ будут также специальными группами ([3]). $H/\{z\}$ периодическая группа, так как в специальной группе имеется только одна максимальная периодическая подгруппа ([3]), а смежные классы $x\{z\}$ и $y\{z\}$, порождающие $H/\{z\}$, периодические в ней. Из локальной конечности специальной группы ([4]) следует и конечность $H/\{z\}$. Следовательно, H обладает возрастающим центральным рядом конечной длины. Отсюда, в силу леммы 1, подгруппа H является R-группой, т. е. из $x^m = y^m$ следует $x = y$.

Следствие 1. *Если группа G без кручения обладает возрастающим центральным рядом произвольной длины, то G есть R-группа.*

Так как в R-группе центр — изолированная подгруппа ([2]), то мы имеем:

Следствие 2*. *В группе без кручения с возрастающим центральным рядом все факторы ее верхнего центрального ряда будут группами без кручения.*

2°. Пусть H — подгруппа группы G. Пересечение $J(H)$ всех изолированных в G подгрупп, содержащих H, будем называть изолятором подгруппы H в G ([2]).

Лемма 2. *Пусть центр Z подгруппы H из R-группы отличен от единицы, тогда центр ее изолятора $J(H)$ также отличен от единицы и содержит $J(Z)$.*

Лемма 3. *Пусть H — нормальный делитель специальной группы G — имеет отличный от единицы центр Z и фактор-группа G/H бесконечная циклическая, тогда и сама группа G имеет отличный от единицы центр, нетривиально пересекающийся с Z.*

Доказательство. Пусть xH — образующий элемент фактор-группы G/H и z — элемент из Z, перестановочный с подгруппой $\{x\}$. Из двух возможных случаев $zxz^{-1} = x^{-1}$ и $zxz^{-1} = x$ в специальной группе имеет место лишь второй, ибо в первом случае в подгруппе $\{x\}\{z\}$ нормализатор подгруппы $\{z\}$ совпадает с ней. Следовательно, z принадлежит центру группы G.

Теорема 2. *Абелева группа без кручения тогда и только тогда удовлетворяет условию минимальности или условию максимальности по изолированным подгруппам, когда она имеет конечный ранг.*

Теорема 3. *Специальная группа G без кручения, обладающая по крайней мере одной максимальной абелевой подгруппой A конечного ранга, имеет нетривиальный центр.*

Доказательство. Подгруппа A изолирована в G ([2]). Пусть x — элемент, перестановочный с A. Центр подгруппы $A\{x\}$ (лемма 3), а значит и центр Z_1 ее изолятора N_1 (лемма 2) отличны от единицы. Z_1 содержится в A. В нормализаторе подгруппы N_1 берем элемент $y \overline{\in} N_1$. Центр подгруппы $N_1\{y\}$, а значит и центр Z_2 ее изолятора N_2 отличны от единицы. Очевидно, $Z_2 \subset Z_1$. Применим эти рассуждения к подгруппе N_2 и продолжим процесс. Таким образом мы построим ряд изолированных подгрупп:

$$A \subset N_1 \subset N_2 \subset \ldots \subset N_\alpha \subset \ldots \subset N_\gamma = G,$$

доходящий до самой группы, и невозрастающий ряд отличных от единицы, изолированных в G абелевых подгрупп группы A:

$$A \supseteq Z_1 \supseteq Z_2 \supseteq \ldots \supseteq Z_\alpha \supseteq \ldots,$$

* Следствие 2 сообщено автору проф. С. Н. Черниковым.

в котором Z_α есть центр N_α. Так как в A цепочки изолированных подгрупп обрываются, то для некоторого i $Z_i = Z_{i+k}$ для любого целого k. Следовательно, Z_i содержится в центре всех N_α, $\alpha \geqslant i$, в том числе и в центре группы G.

Лемма 4. *Если центр Z группы G без кручения имеет конечный ранг, а фактор-группа G/Z абелева без кручения бесконечного ранга, то группа G имеет абелеву подгруппу бесконечного ранга.*

Лемма доказывается, опираясь на следующий легко доказуемый факт: если в группе без кручения G фактор-группа G/K по изолированной локально-циклической подгруппе K центра абелева группа без кручения бесконечного ранга, то и сама группа G имеет абелеву подгруппу бесконечного ранга.

Из леммы 4 непосредственно следует:

Лемма 5. *Если в специальной группе G без кручения все абелевы погруппы конечного ранга, то фактор-группа G/Z по ее центру Z обладает таким же свойством.*

Лемма 6. *Если группа G без кручения обладает возрастающим центральным рядом*

$$1 = Z_0 \subset Z_1 \subset Z_2 \subset \ldots \subset Z_n \subset \ldots \subset Z_\omega,$$

причем $Z_\omega = G$, то по крайней мере один фактор ее верхнего центрального ряда имеет бесконечный ранг.

Доказательство. Пусть ряд (*) верхний и ранги всех его факторов конечны. Обозначив N_i централизатор гиперцентра Z_i, мы получим убывающую цепочку изолированных нормальных делителей в G:

$$G = N_1 \supset N_2 \supset \ldots \supset N_k \supset N_{k+1} \supset \ldots$$

Фактор-группа N_k/N_{k+1} есть абелева группа без кручения конечного ранга. В самом деле, пусть $b_1, b_2, \ldots, b_l$ — базис Z_{k+1} по модулю Z_k. Отобразим подгруппу N_k в пересечение $N_k \cap Z_k$ формулой

$$x \to [x, b_i] = x b_i x^{-1} b_i^{-1},$$

где $x \in N_k$ и $[x, b_i] \in N_k \cap Z_k$. Так как N_k есть централизатор Z_k, то $[xy, b_i] = [x, b_i]\,[y, b_i]$, и определенное отображение будет гомоморфизмом N_k на абелеву подгруппу из Z_k. Ядром гомоморфизма будет совокупность F_i элементов из N_k, перестановочных с b_i. Фактор-группа N_k/F_i абелева без кручения конечного ранга, так как Z_k не содержит абелевых подгрупп бесконечного ранга. Следовательно, и фактор-группа N_k/N_{k+1} группы N_k по пересечению $\bigcap\limits_{i=1}^{l} F_i = N_{k+1}$ есть абелева без кручения конечного ранга. Отсюда следует, что N_k ни при каком k не принадлежит никакому из гиперцентров Z_n. Но тогда пересечение $N_k \cap (Z_{n+1} \setminus Z_n)$ отлично от единицы при любых n и k, так как в группе с возрастающим центральным рядом всякий нормальный делитель нетривиально пересекается с центром ([5]). Поэтому и пересечение подгруппы $N = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} N_k$ с множеством $Z_{n+1} \setminus Z_n$ отлично от единицы при любом n. В таком случае N есть абелева подгруппа бесконечного ранга, содержащаяся в центре Z_1, что противоречит предположению.

Теперь, опираясь на теорему 3 и леммы 5 и 6, легко доказывается теорема 4.

Теорема 4. *Если в специальной группе G без кручения все абелевы подгруппы конечного ранга, то она обладает конечным* *возрастающим центральным рядом, все факторы которого суть абелевы без кручения конечного ранга.*

Из теоремы 4 следует любопытное следствие.

Следствие. *Специальная группа без кручения с условием максимальности для абелевых подгрупп обладает конечным центральным рядом, все факторы которого суть группы целочисленных линейных форм конечного ранга.*

Уральский государственный университет
им. А. М. Горького

Поступило
19 IX 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Н. Черников, ДАН, 63, № 1 (1948). [2] П. Г. Конторович, Матем. сборн., 22 (64) : 1 (1948). [3] О. Ю. Шмидт, Матем. сборн., 8 (50) : 3 (1940). [4] А. Д. Курош, Теория групп, 1944. [5] С. Н. Черников, Матем. сборн., 22 (64): 2 (1948). [6] А. И. Мальцев, Изв. АН СССР, сер. матем., 13, 201 (1949).