Доклады Академии Наук СССР
1950, Том LXX, № 2

МАТЕМАТИКА

Д. Л. БЕРМАН

РАСХОДИМОСТЬ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОГО ПРОЦЕССА С. Н. БЕРНШТЕЙНА

(Представлено академиком В. И. Смирновым 14 XI 1949)

1. Пусть заданы треугольная матрица узлов

$$\begin{array}{c} x_1^{(1)} \\ x_1^{(2)}\ x_2^{(2)} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_1^{(n)}\ x_2^{(n)}\ \ldots\ x_n^{(n)} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array} \qquad (1)$$

$$-1 \leqslant x_1^{(n)} < x_2^{(n)} < \ldots < x_n^{(n)} \leqslant 1$$

и функция $f(x)$, определенная в интервале $[-1, 1]$.

Обозначим через $L_n(f, x)$ интерполяционный полином Лагранжа степени $n-1$, построенный для n-й строчки матрицы (1) и для функции $f(x)$.

Как известно,

$$L_n(f, x) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k^{(n)})\, l_k^{(n)}(x),$$

где

$$l_k^{(n)}(x) = \frac{\omega_n(x)}{(x - x_k^{(n)})\, \omega_n'(x_k^{(n)})},$$

$$\omega_n(x) = (x - x_1^{(n)})(x - x_2^{(n)}) \ldots (x - x_n^{(n)}).$$

Согласно классическому результату акад. С. Н. Бернштейна — Г. Фабера, не существует матрицы вида (1), при которой для любой непрерывной функции выполняется соотношение

$$L_n(f, x) \to f(x), \quad n \to \infty$$

равномерно относительно $x \in [-1, 1]$.

В связи с этим отрицательным результатом интересно заметить, что для чебышевской матрицы узлов $\left(x_k^{(n)} = \cos\frac{2k-1}{2n}\pi\right)$ С. Н. Бернштейн ([1]) построил такой интерполяционный процесс $\{A_n(f, x)\}$, что отношение степени полинома $A_n(f, x)$ к числу его узлов может быть сделано сколь угодно близким к единице и вместе с тем для любой непрерывной функции $f(x)$ выполняется равномерно соотношение

$$A_n(f, x) \to f(x), \quad n \to \infty, \quad x \in [-1, 1].$$

В нашей заметке ([2]) была установлена равномерная сходимость интерполяционного процесса С. Н. Бернштейна для всего класса непрерывных функций при условии, что матрица (1) принадлежит некоторому классу матриц узлов (в частности, этому классу принадлежит чебышевская матрица узлов).

В настоящей работе мы изучаем интерполяционный процесс С. Н. Бернштейна, построенный для матрицы равноотстоящих узлов промежутка $[-1, 1]$ (в формулах ([1]), стр. 49—50, полагаем $l = 1$):

$$x_k^{(2n+1)} = -1 + \frac{k-1}{n}, \quad k = 1, 2, \ldots, (2n+1), \quad n = 1, 2, \ldots;$$

$$x_k^{(2n+2)} = -1 + \frac{2(k-1)}{2n+1}, \quad k = 1, 2, \ldots, (2n+2), \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{2}$$

Имеет место следующий результат:

Теорема. *Интерполяционный процесс С. Н. Бернштейна, построенный для матрицы* (2) *и функции* $f(x) \equiv x$, *расходится во всех точках интервала* $(-1, 1)$, *за исключением точки* $x = 0$.

2. Приведем основные моменты наших рассуждений.

Лемма 1 ([3]). *Пусть* x — *любое число из интервала* $(0,1)$. *Тогда бесконечно много раз имеет место представление*

$$x = \frac{\lambda_n}{2n+1} + \frac{\theta_n}{2n+1}, \quad m(x) < \theta_n < 1 - m(x), \quad 0 < m(x) < 1, \tag{3}$$

где λ_n *и* n — *натуральные числа и функция* $m(x)$ *зависит лишь от* x.

Лемма 2 ([3]). *Пусть число* $x \in (0, 1)$. *Пусть* n *принимает те натуральные значения, при которых бесконечно много раз имеет место представление* (3). *Определим натуральные числа* k *и* λ_n' *из условий* $\frac{1}{k+1} < x \leqslant \frac{1}{k}$ *и* $\lambda_n' = \left[\frac{\lambda_n}{2}\right]$.

Тогда при достаточно большом n

$$\left| l_{k\lambda_n'+s_n}^{(2n+2)}(x) \right| > \frac{e^{n\psi_k(x)}\varphi_k(x)}{4n(2n+1)}\,\theta_n(1-\theta_n), \tag{4}$$

где

$$\varphi_k(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{(x+1-kx)\sqrt{kx(2-kx)}},$$

$$\psi_k(x) = \ln\frac{(1+x)^{1+x}(1-x)^{1-x}}{(2-kx)^{2-kx}(kx)^{kx}} > 0 \text{ при } \frac{1}{k+1} < x \leqslant \frac{1}{k}$$

и натуральное число $s_n = O(n)$.

3. Пусть матрица узлов совпадает с матрицей (2). Рассмотрим функцию $f(x) \equiv x$. Очевидно, что при $n > 1$ $L_n(f, x) \equiv x$. Следовательно, сходимость интерполяционного процесса Лагранжа в данном случае тривиальна.

Построим для той же матрицы и той же функции интерполяционный процесс С. Н. Бернштейна с отношением степени полинома к числу узлов сколь угодно близким к двум *:

$$A_{2n+2}(f, x) = x_1 l_1(x) + x_1 l_2(x) + \ldots + x_{2n+1} l_{2n+1}(x) + x_{2n+1} l_{2n+2}(x). \tag{5}$$

Заметим, что $x = \sum_{k=1}^{2n+2} x_k l_k(x)$. Поэтому из (5) следует

$$x - A_{2n+2}(f, x) = \frac{2}{2n+1} \sum_{j=1}^{n+1} l_{2j}(x). \tag{6}$$

Будем пока считать, что $0 < x < 1$. Пусть n принимает те натуральные значения, при которых бесконечно много раз имеет место представление (3).

Допустим, что существует натуральное число j_0, удовлетворяющее условию $\lambda_n + 2n + 3 - 4j_0 = 0$.

Тогда после простых вычислений мы получим

$$\sum_{j=1}^{n+1} l_{2j}(x) = \frac{\omega_{2n+2}(x)(2n+1)^{2n+1}}{2^{2n+1}} \Big[\frac{2n+1}{(2n+2-2j_0)!\,(2j_0-1)!\,\theta_n} +$$

$$+ \frac{2n+1}{(2n+4-2j_0)!\,(2j_0-3)!\,(4+\theta_n)} + \ldots + \frac{2n+1}{2n!\,(4j_0-4+\theta_n)} -$$

$$- \frac{2n+1}{(2n-2j_0)!\,(2j_0+1)!\,(4-\theta_n)} - \ldots - \frac{2n+1}{(2n+1)!\,[4(n+1-j_0)-\theta_n]} . \tag{7}$$

Заметим, что при $1 \leqslant k < n - j_0$ $C_{2n+1}^{2j_0+2k+1} < C_{2n+1}^{2j_0-2k-1}$, поэтому

$$\frac{2n+1}{(2n+2-2j_0+2k)!\,(2j_0-2k-1)!\,(4k+\theta_n)} - \frac{2n+1}{(2n-2j_0-2k)!\,(2j_0+2k+1)\,(4k+4-\theta_n)} >$$

$$> \frac{1}{2(n+1)} \frac{2n+1}{(2n+2-2j_0+2k)!\,(2j_0-2k-1)!\,(4k+\theta_n)} . \tag{8}$$

Стало быть, из (6), (7) и (8) следует, что

$$| x - A_{2n+2}(f, x) | \geqslant \frac{1}{(n+1)(2n+1)} \Big| \sum_{x_{2j} \leqslant x} l_{2j}(x) \Big| .$$

Так как все слагаемые последней суммы одного знака, то, согласно лемме 2,

$$| x - A_{2n+2}(f, x) | \geqslant \frac{e^{n\psi_k(x)} \varphi_k(x)}{4(n+1)^2 (2n+1)^2} \theta_n (1 - \theta_n) \to \infty, \quad n \to \infty.$$

Мы рассмотрели случай $\lambda_n + 2n + 3 \equiv 0 \pmod 4$. Таким же образом рассматривается случай $\lambda_n + 2n + 1 \equiv 1 \pmod 4$. Если же $\lambda_n + 2n + 3 \equiv 3 \pmod 4$ или $\lambda_n + 2n \equiv 0 \pmod 4$, то наши рассуждения слегка меняются.

---

* Ради простоты мы будем опускать верхний индекс у полинома $l_k^{(2n+2)}(x)$.

А именно, из тождества $\sum_{j=1}^{2n+2} l_j(x) \equiv 1$ и из (6) следует

$$| x - A_{2n+2}(f, x) | \geqslant \frac{2}{2n+1} \left| \sum_{j=0} l_{2j+1}(x) \right| - \frac{2}{2n+1}.$$

После этого можно применить к последней сумме предыдущие рассуждения. Случай отрицательного x, в силу симметрии матрицы (2), сводится к случаю положительного x.

Таким образом, мы доказали, что интерполяционный процесс С. Н. Бернштейна, построенный для функции $f(x) \equiv x$ и для матрицы равноотстоящих узлов интервала $[-1, 1]$, расходится во всех точках $x \neq 0$ из $(-1, 1)$. Нетрудно доказать, что в точке $x = 0$ указанный интерполяционный процесс сходится.

Поступило
19 X 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Н. Бернштейн, Сообщ. Харьковск. матем. об-ва, сер. 4, 5, 49 (1932) [2] Д. Л. Берман, ДАН, 60, № 3 (1948). [3] Д. Л. Берман, Диссертация, ЛГУ, 1948.