Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXX, № 1

МАТЕМАТИКА

ЛЮБОМИР ИЛИЕВ

О КОНЕЧНЫХ СУММАХ ОДНОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 5 XI 1949)

Пусть S_1 — класс функций

$$f_1(z) = z + a_2 z^2 + \ldots, \tag{1}$$

регулярных и однолистных в круге $|z| < 1$, и S_2 — класс функций

$$f_2(z) = z + a_3 z^3 + \ldots, \tag{2}$$

нечетных, регулярных и однолистных в том же круге.

В нашей работе ([1]), используя одно неравенство Г. М. Голузина ([2]), мы установили следующую теорему:

Теорема 1. *Если* $f_k(z) \in S_k$, $k = 1, 2$, *и* $0 < r < 1$, $|z_1| \leqslant r$, $|z_2| \leqslant r$, $z_1 \neq z_2$, *то*

$$\left| \frac{f_k(z_1) - f_k(z_2)}{z_1 - z_2} \right| \geqslant \frac{1 - r^2}{(1 + r^k)^{4/k}} . \tag{I}$$

Оценка (I) *точная.*

В настоящем сообщении с помощью неравенства (I), следуя методу Левина ([3]), мы установим следующие теоремы:

Теорема 2. *Если функция*

$$f_1(z) = z + a_2 z^2 + \ldots \tag{3}$$

принадлежит классу S_1, *то конечная сумма*

$$\sigma_n^{(1)}(z) = z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n \tag{4}$$

при $n \geqslant 15$ *однолистна в круге* $|z| < 1 - 4\frac{\ln n}{n}$.

Теорема 3. *Если функция*

$$f_2(z) = z + a_3 z^3 + \ldots \tag{5}$$

принадлежит классу S_2, *то конечная сумма*

$$\sigma_n^{(2)}(z) = z + a_3 z^3 + \ldots + a_{2n+1} z^{2n+1} \tag{6}$$

при $n \geqslant 11$ *однолистна в круге* $|z| < \sqrt{1 - 3\frac{\ln n}{n}}$.

Теорема 2 уточняет результат Левина [3].

Кроме того, используя (I) и один результат Г. М. Голузина, мы упростим доказательство Сеге [4] об однолистности в круге $|z| < 1/4$ сумм $\sigma_n^{(1)}(z)$ для класса S_1.

Одним общим методом Сеге легко установил эту теорему при $n \geqslant 5$. Для случаев $n = 2, 3, 4$ он дал прямое доказательство, причем его доказательство при $n = 2$ не представляет трудности, а при $n = 3$ и $n = 4$ очень сложно.

При помощи (I) мы установим теорему общим методом для $n \geqslant 4$.

§ 1. Доказательство теорем 2 и 3. При $k = 1$, $|z_1| \leqslant r$, $|z_2| \leqslant r$, $z_1 \neq z_2$ для функций класса S_1 из (I) получаем:

$$\left|\frac{f_1(z_1) - f_1(z_2)}{z_1 - z_2}\right| \geqslant \frac{1-r}{(1+r)^3}. \tag{7}$$

Следовательно, если при $|z_1| \leqslant r_n$, $|z_2| \leqslant r_n$, $z_1 \neq z_2$, $r_n < 1$ имеем

$$\left|\sum_{\nu=n+1}^{\infty} a_\nu \frac{z_1^\nu - z_2^\nu}{z_1 - z_2}\right| < \frac{1 - r_n}{(1+r_n)^3}, \tag{8}$$

или

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} |a_\nu| \nu r_n^{\nu-1} < \frac{1-r_n}{(1+r_n)^3}, \tag{9}$$

то (4) будет однолистна в $|z| < r_n$.

Если примем во внимание неравенство Литлвуда $|a_\nu| < e\nu$, то увидим, что (9) выполнено при условии

$$e \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^2 r_n^{\nu-1} < \frac{1-r_n}{(1+r_n)^3}. \tag{10}$$

Но

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^2 r_n^{\nu-1} = \frac{r_n^n}{(1-r_n)^3}\left[n^2(1-r_n)^2 - (2n-1)r_n + 2n + 1\right], \tag{11}$$

и, следовательно, неравенство (10) имеет вид

$$\frac{r_n^n}{(1-r_n)^4}\left[n^2(1-r_n)^2 - (2n-1)r_n + 2n + 1\right] < \frac{1}{e(1+r_n)^3}. \tag{12}$$

Последнее неравенство верно, если

$$\frac{r_n^n}{(1-r_n)^4}\left[n^2(1-r_n)^2 - (2n-1)r_n + 2n + 1\right] < \frac{1}{8e}. \tag{13}$$

Пусть

$$r_n = 1 - \frac{\alpha}{n}, \quad 0 < \alpha < n. \tag{14}$$

Следовательно,

$$r_n^n = \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)^n < e^{-\alpha} \tag{15}$$

и

$$n^2(1-r_n)^2 - (2n-1)r_n + 2n + 1 < \alpha^2 + 2\alpha + 2. \tag{16}$$

Из (14), (15) и (16) следует, что (13) будет удовлетворено, если

$$n^4 e^{-\alpha} \frac{\alpha^2+2\alpha+2}{\alpha^4} < \frac{1}{8e}. \tag{17}$$

Если положить $\alpha = 4\ln n$, то неравенство (17) верно при $n \geqslant 4$. Для того чтобы результат теоремы 2 представлялся ценным, необходимо, чтобы $r_n > {}^1/_4$. Последнее условие выполнено при $n \geqslant 15$.

Теорема 3 доказывается тем же методом.

§ 2. При $|z_1| < {}^1/_4$, $|z_2| < {}^1/_4$, $z_1 \neq z_2$ для функций класса S_1 из (I) получаем

$$\left| \frac{f_1(z_1) - f_1(z_2)}{z_1 - z_2} \right| \geqslant \frac{48}{125}. \tag{18}$$

Следовательно, $\sigma_n^{(1)}(z)$ однолистна в круге $|z| < {}^1/_4$, если выполнено неравенство

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{|a_\nu|\,\nu}{4^{\nu-1}} < \frac{48}{125}. \tag{19}$$

Как показал Г. М. Голузин ([5]), для функций класса S_1 имеем $|a_n| < {}^3/_4\, en$, так что (19) верно, если

$$\frac{3}{4} e \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{\nu^2}{4^{\nu-1}} < \frac{48}{125}, \tag{20}$$

т. е. если

$$\frac{3}{4} e \frac{9n^2 - 24n + 20}{27 \cdot 4^{n-1}} < \frac{48}{125}. \tag{21}$$

При $n = 4$ неравенство (21) верно, и, значит, теорема Сеге установлена при $n \geqslant 4$.

Таким образом, прямое доказательство Сеге при $n = 4$, отличающееся сложностью, излишне. Отметим, что при помощи метода Сеге невозможно внести большие упрощения в доказательство. Действительно, исходя из неравенства (18), методом Сеге нельзя установить теорему при $n = 3$, даже в предположении верности неравенства Бибербаха $|a_n| \leqslant n$. С другой стороны, неравенство (I) точно при $k = 1$ и, следовательно, (18) не может быть улучшено.

Математический институт
при Софийском университете
София, Болгария

Поступило
25 X 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. Илиев, ДАН, 69, № 4 (1949). [2] Г. М. Голузин, Матем. сборн., 19 (61) : 2, 183 (1946). [3] V. Levin, Jahresber. d. Deutsh. math. Vereinigung, 42, 68 (1933). [4] G. Szegö, Math. Ann., 100, 188 (1928). [5] Г. М. Голузин, Матем. сборн., 22 (64), 373 (1948).