Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXX, № 1

МАТЕМАТИКА

Н. А. СТОЛЯРОВ

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ИНТЕГРАЛА СТИЛЬТЬЕСА

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 5 XI 1949)

Л. В. Канторовичем [1] предложено следующее обобщение интеграла Стильтьеса. Пусть $f(x)$ и $\varphi(x)$ — некоторые функции, определенные и конечные в промежутке (a, b). Если при различных разбиениях (a, b) на части $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ сумма

$$S = \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \frac{(x_{i+1} - x_i)\varphi(x_{i-1}) - (x_{i+1} - x_{i-1})\varphi(x_i) + (x_i - x_{i-1})\varphi(x_{i+1})}{(x_{i+1} - x_i)(x_i - x_{i-1})}$$

стремится к определенному пределу, когда все разности $x_i - x_{i-1}$ равномерно стремятся к нулю, то этот предел он назвал обобщенным интегралом Стильтьеса и обозначил

$$\lim_{x_i - x_{i-1} \to 0} S = \int_a^b f(x) \frac{d^2\varphi(x)}{dx}.$$

В этой же работе им указан ряд свойств предложенного обобщенного интеграла Стильтьеса.

М. А. Пудовкин [2], пользуясь аппаратом обобщенного интеграла Стильтьеса, решил ряд задач строительной механики в более общей постановке, чем обычно рассматривали эти задачи другие авторы.

Исходя из необходимости решения задач строительной механики, представляет интерес расширить обобщение интеграла Стильтьеса следующим образом.

Пусть на промежутке (a, b) заданы две конечные функции $f(x)$ и $\varphi(x)$. Если при различных разбиениях промежутка на части $a < x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ сумма

$$S = \sum_{i=1}^{n-k+1} f(x_i)\left[\omega(\varphi; x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k-1}) - \omega(\varphi; x_{i-1}, x_i, \ldots, x_{i+k-2}\right], k < n,$$

где в квадратных скобках стоит разность между разностными отношениями k — 1-го порядка, стремится к определенному пределу, когда все разности $x_i - x_{i-1}$ равномерно стремятся к нулю, то будем этот предел называть обобщенным интегралом Стильтьеса — Канторовича и обозначать

$$\lim_{x_i - x_{i-1} \to 0} S = \int_a^b f(x) \frac{d^k\varphi}{dx^{k-1}}.$$

Нетрудно заметить, что предложенное Л. В. Канторовичем обобщение получается из приведенного при $k=2$.

Отметим некоторые простейшие свойства обобщенного интеграла Стильтьеса — Канторовича.

1. Если $f(x)$ ограничена, а $\varphi(x)$ — полином степени меньшей, чем k, то интеграл существует.

2. Если $P(x)$ полином степени меньшей, чем $k-1$, то

$$\int_a^b f(x)\,\frac{d^k(\varphi+P)}{dx^{k-1}} = \int_a^b f(x)\,\frac{d^k\varphi}{dx^{k-1}}.$$

3. Имеем

$$\int_a^b [C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x)]\,\frac{d^k[D_1\varphi_1(x)+D_2\varphi_2(x)]}{dx^{k-1}} =$$

$$= C_1 D_1 \int_a^b f_1(x)\,\frac{d^k\varphi_1(x)}{dx^{k-1}} + C_2 D_1 \int_a^b f_2(x)\,\frac{d^k\varphi_1(x)}{dx^{k-1}} +$$

$$+ C_1 D_2 \int_a^b f_1(x)\,\frac{d^k\varphi_2}{dx^{k-1}} + C_2 D_2 \int_a^b f_2(x)\,\frac{d^k\varphi_2(x)}{dx^{k-1}},$$

где C_1, C_2, D_1, D_2 — постоянные.

4. Интеграл существует, если функция $f(x)$ интегрируема в смысле Римана в промежутке (a, b) и функция $\varphi(x)$ в этом промежутке имеет непрерывную производную k-го порядка.

5. Если функция $f(x)$ непрерывна в промежутке (a, b), а функция $\varphi(x)$ имеет производную $k-1$-го порядка ограниченной вариации, то интеграл существует.

6. Если функция $f(x)$ непрерывна в промежутке (a, b), а производная $k-2$-го порядка от функции $\varphi(x)$ существует и выпукла и если производные $\varphi^{(k-1)}(a)$ и $\varphi^{(k-1)}(b)$ существуют и конечны, то интеграл существует.

7. Если функция $f(x)$ имеет непрерывную производную в промежутке (a, b), а функция $\varphi(x)$ имеет производную порядка $k-2$ ограниченной вариации и, кроме того, $\varphi^{(k-1)}(a)$ и $\varphi^{(k-1)}(b)$ существуют и конечны, то интеграл существует и равен

$$\int_a^b f(x)\,\frac{d^k\varphi}{dx^{k-1}} = \frac{2}{(k-1)!}\left\{[f(x)\,\varphi^{(k-1)}(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)\,d\varphi^{(k-2)}(x)\right\}.$$

Арзамасский
учительский институт

Поступило
31 X 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. В. Канторович, ДАН, 4 (1934). [2] М. А. Пудовкин, Кандидатская диссертация. Казанск. ун-т, 1947.