Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXX, № 1

МАТЕМАТИКА

О. А. ОЛЕЙНИК

О ТОПОЛОГИИ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КРИВЫХ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 4 XI 1949)

Пусть $F(x, y, z)$ — многочлен общей степени p и $f(x, y, z)$ — многочлен общей степени q относительно переменных x, y, z с действительными коэффициентами. Через Г обозначим алгебраическую поверхность в действительном трехмерном проективном пространстве (x, y, z, t), определяемую уравнением

$$t^p F\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \frac{z}{t}\right) = 0,$$

и через γ — поверхность в проективном пространстве, определяемую уравнением

$$t^q f\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \frac{z}{t}\right) = 0.$$

Будем предполагать, что Г и γ не содержат действительных особых точек. Пусть пересечение поверхностей Г и γ определяет в проективном пространстве действительную алгебраическую пространственную кривую K.

Мы будем предполагать, что эта кривая также не имеет действительных особых точек, т. е. ранг матрицы

$$\left\| \begin{matrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{matrix} \right\|$$

равен 2 во всех точках кривой K.

Обозначим через M_c замыкание в проективном пространстве множества точек на поверхности Г, для которых выполняется неравенство:

$$f(x, y, z) \geqslant c \quad \text{при } t = 1.$$

Через $E(M_c)$ обозначим эйлерову характеристику множества M_c. В случае четного q границей множества M_0 на поверхности Г служит кривая K. В случае, когда q нечетно, границу M_0 составляют кривая K и кривая, полученная пересечением Г с бесконечно удаленной плоскостью.

Лемма 1. *Пусть система уравнений*

$$F = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

имеет $p(p+q-2)^2$ *конечных и различных решений* $Q_\alpha = (x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha)$ *и* C_1 *и* C_2 — *такие действительные числа, что для всех действительных решений* Q_α

$$C_2 < f(x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha) < C_1.$$

Тогда, если q *четное,*

$$\left| E(M_0) - \frac{E(M_{c_1}) + E(M_{c_2})}{2} \right| < \frac{1}{3}p^3 + \frac{3}{8}pq^2 + \frac{1}{4}p^2q - p^2 - pq + \frac{7}{6}p + 1.$$

Если q *нечетное, то*

$$\left| E(M_0) - \frac{E(M_{c_1}) + E(M_{c_2})}{2} \right| <$$

$$< \frac{1}{3}p^3 + \frac{3}{8}pq^2 + \frac{1}{4}p^2q - \frac{3}{4}p^2 - \frac{3}{4}pq + \frac{13}{24}p + 1.$$

Будем предполагать, что при нечетном q поверхности Г, γ и плоскость $t=0$ пересекаются в конечном числе точек.

Пользуясь леммой 1, можно доказать следующее предложение:

Теорема 1. *Если* q *четное, то*

$$|E(M_0)| \leqslant \frac{1}{3}p^3 + \frac{3}{8}pq^2 + \frac{1}{4}p^2q - p^2 - pq + \frac{7}{6}p + \frac{|E(\Gamma)|}{2}. \quad (1)$$

Если q *нечетное, то*

$$|E(M_0)| \leqslant \frac{1}{3}p^3 + \frac{3}{8}pq^2 + \frac{1}{4}p^2q - \frac{3}{4}p^2 - \frac{1}{4}pq + \frac{13}{24}p + \frac{|E(\Gamma)|}{2}. \quad (2)$$

Известно, что для $E(\Gamma)$ имеет место оценка [1]:

$$|E(\Gamma)| \leqslant (p-1)^3 - \frac{p(p-1)(p-2)}{3} + 1.$$

При $p=1$ и любом q, т. е. в случае плоских кривых, соотношения (1) и (2) были получены раньше И. Г. Петровским [2]. В этом случае И. Г. Петровский построил многочлены f, для которых соотношения (1) и (2) выполняются со знаком равенства. В случае $p=2$ и при произвольном q мы можем аналогичным образом построить многочлены f, для которых соотношения (1) и (2) выполняются со знаком равенства.

Поступило
4 XI 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. Г. Петровский и О. А. Олейник, ДАН, 67, № 1 (1949). [2] И. Г. Петровский, Ann. of Math., 39, № 1, 189 (1938).