Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXX, № 1

МАТЕМАТИКА

И. М. ГЕЛЬФАНД

СФЕРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ НА СИММЕТРИЧЕСКИХ РИМАНОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 5 XI 1949)

1. Пусть $\mathfrak{G}$ — группа Ли и $\mathfrak{H}$ — ее компактная подгруппа. Рассмотрим многообразие X, элементами которого являются левые классы смежности $\mathfrak{G}$ по $\mathfrak{H}$. Мы можем известным образом рассматривать $\mathfrak{G}$ как группу преобразований X. Действительно, если $x \in X$ есть некоторый класс $\mathfrak{H}g_0$, то под $y = xg$ мы будем понимать класс $\mathfrak{H}g_0 g$.

Рассмотрим совокупность R суммируемых функций $f(g)$, удовлетворяющих условию $f(h_1 g h_2) \equiv f(g)$ для почти всех g при любых $h_1, h_2 \in \mathfrak{H}$ (функции, постоянные на двусторонних классах смежности $\mathfrak{G}$ по $\mathfrak{H}$). Определим умножение таких функций по формуле $f = f_1 \times f_2$, где $f(g) = \int f_1(gg_1^{-1}) f_2(g_1)\, dg_1$. Если определить сложение таких функций как обычно и положить $\|f\| = \int |f(g)|\, dg$, то R есть нормированное кольцо. Если, далее, ввести в R инволюцию, полагая $f^*(g) = \overline{f(g^{-1})}$, то R превращается в кольцо с инволюцией ([1]). Так же как в ([2]), можно показать, что R не имеет радикала. Линейный функционал $L(f)$ в R мы называем положительным, если $L(f^* f) \geqslant 0$ для $f \in R$. Положительный функционал задается формулой $L(f) = \int f(g) \varphi(g)\, dg$, где $\varphi(g)$ — положительно определенная функция, удовлетворяющая условию:

$$\varphi(h_1 g h_2) \equiv \varphi(g) \quad \text{для любых} \quad h_1, h_2 \in \mathfrak{H}, \tag{1}$$

т. е. функция, постоянная на двусторонних классах смежности $\mathfrak{G}$ по $\mathfrak{H}$.

Если положительно определенная функция $\varphi(g)$, удовлетворяющая условию (1), не может быть представлена в виде $\varphi(g) = \varphi_1(g) + \varphi_2(g)$, где $\varphi_i(g)$ — положительно определены, удовлетворяют условию (1) и линейно независимы, то это разложение невозможно даже если $\varphi_i(g)$ не удовлетворяют условию (1), т. е. $\varphi(g)$ есть элементарная положительно определенная функция.

Рассмотрим унитарные представления, отвечающие элементарной положительно определенной функции $\varphi(g)$ ([3, 1]). *Представления, отвечающие элементарной функции $\varphi(g)$, удовлетворяющей условию (1), характеризуются тем, что в них есть вектор, инвариантный относительно преобразований, отвечающих элементам $h \in \mathfrak{H}$.*

Функции $\varphi(g)$ мы можем при желании перенести на многообразие X. Действительно, пусть x_1 (соотв. x_2) есть класс $\mathfrak{H}g_1$ (соотв. $\mathfrak{H}g_2$).

Положим $K(x_1, x_2) = \varphi(g_2^{-1}g_1)$. Из равенства $\varphi(h_1 g h_2) \equiv \varphi(g)$ следует, что $K(x_1, x_2)$ не зависит от выбора представителей в классах.

Ядра $K(x_1, x_2)$, отвечающие функциям $\varphi(g)$, удовлетворяют условиям: 1°. $K(x_1 g, x_2 g) \equiv K(x_1, x_2)$. 2°. $K(x_1, x_2)$ — положительно определенное ядро. Обратное утверждение также верно.

Если зафиксировать какую-либо точку x_0 и положить $K(x_0, x) = K(x)$, то функции $K(x)$ удовлетворяют условию $K(xg_1) = K(x)$ для всех преобразований, оставляющих точку x_0 на месте, т. е. $K(x)$ постоянна на „сферах" с центром в точке x_0.

Функции $K(x)$ (или $K(x_1, x_2)$), отвечающие элементарным положительно определенным функциям, мы будем называть зональными сферическими функциями.

2. Положительно определенные функции, связанные с симметрическим римановым пространством. В этом параграфе мы будем предполагать, что существует инволютивный автоморфизм группы $\mathfrak{G}$, при котором элементы $h \in \mathfrak{H}$ ($\mathfrak{H}$ — компактна) остаются на месте (условие A). Тогда X можно рассматривать как симметрическое риманово пространство, а преобразования $\mathfrak{G}$ как его движения.

Теорема 1. *Если выполнено условие A, то кольцо R коммутативно. Вообще, коммутативность кольца R эквивалентна тому, что в каждом неприводимом унитарном представлении группы $\mathfrak{G}$ подпространство векторов, инвариантных относительно всех преобразований из $\mathfrak{H}$, не более чем одномерно.*

Пусть $\mathfrak{M}$ — множество симметричных максимальных идеалов кольца R*. Гомоморфизм, отвечающий симметричному максимальному идеалу M, имеет вид $f \to \int\limits_{\mathfrak{G}} f(g)\varphi_M(g)\,dg$, где $\varphi_M(g)$ — элементарная положительно определенная функция, удовлетворяющая условию (1). Применяя теорему о разложении положительного функционала на элементарные ([1]), мы получаем:

Теорема 2. *Если выполнено условие A, то всякая положительно определенная функция, удовлетворяющая условию $\varphi(h_1 g h_2) = \varphi(g)$ для $h_1, h_2 \in \mathfrak{H}$, представима в виде*

$$\varphi(g) = \int\limits_{\mathfrak{M}} \varphi_M(g)\,d\sigma(M),$$

где σ — некоторая неотрицательная функция множеств на $\mathfrak{M}$.

Эту теорему можно сформулировать в следующем виде:

Теорема 2'. *Пусть $K(x_1, x_2)$ — положительно определенное ядро в симметрическом римановом пространстве, инвариантное относительно движений, т. е. $K(x_1 g, x_2 g) \equiv K(x_1, x_2)$. Тогда оно может быть представлено в виде*

$$K(x_1, x_2) = \int\limits_{\mathfrak{M}} K_M(x_1, x_2)\,d\sigma(M),$$

где $K_M(x_1, x_2)$ — зональные сферические функции, σ — неотрицательная функция множеств на $\mathfrak{M}$.

3. Умножение сферических функций. Теоремы о среднем. Обозначим через S множество двусторонних классов смежности $\mathfrak{G}$ по $\mathfrak{H}$ или, что то же самое, множество всех „сфер",

* Кольцо R может иметь и несимметрические максимальные идеалы. См. ([1]), стр. 476, где соответствующее кольцо разобрано для случая пространства Лобачевского.

причем „сферы“, которые можно перевести некоторым движением друг в друга, считаются эквивалентными. Ясно, что размерность S равна числу независимых инвариантов пар точек в X. Имеющуюся в $\mathfrak{G}$ меру перенесем в S.

Каждую функцию $f(g) \in R$ мы можем рассматривать как функцию $f(s)$, заданную на S. При этом закон умножения в R задается формулой $f = f_1 \times f_2$, где

$$f(s) = \int_S f_1(s_1) f_2(s_2)\, a(s_1, s_2, s)\, ds_1\, ds_2;$$

интегрирование проводится по мере, имеющейся в S.

Функция $a(s_1, s_2, s)$ имеет следующий геометрический смысл. Рассмотрим точки x_1 и $x_2 \in X$, каждая из которых лежит на сфере s с центром в другой. Рассмотрим далее сферу s_1 с центром в точке x_1 и обозначим через P_1 множество точек, принадлежащих сферам с центром в x_1 и достаточно близким к s_1. Аналогично, через P_2 обозначим множество точек сфер с центром в x_2 и достаточно близких к s_2. Тогда $a(s_1, s_2, s) = \lim \frac{\mu(P_1 \cap P_2)}{\mu(P_1)\,\mu(P_2)}$, где μ — мера в X.

Так как зональные функции постоянны на „сферах“, то обозначим их через $\varphi_M(s)$. Из закона умножения в R мы получаем следующую формулу:

$$\varphi_M(s_1)\,\varphi_M(s_2) = \int_S a(s_1, s_2, s)\,\varphi_M(s)\,ds. \tag{2}$$

Таким образом, имеет место

Теорема 3. *Для зональных сферических функций имеет место закон умножения, задаваемый формулой* (2).

Для сферических функций имеет место теорема о среднем, а именно, если мы имеем сферу s с центром в точке x_1, то интеграл по s функции $K_M(x)$ равен $\varphi_M(s)\,K_M(x_1)$. Эта же теорема имеет место и для незональных сферических функций, на которых мы из-за недостатка места не останавливаемся. Для зональных функций теорема о среднем совпадает с законом умножения и дает другое определение функции $a(s_1, s_2, s)$.

4. Дифференциальные уравнения сферических функций. Обозначим через $e_1, \ldots, e_n$ базис инфинитезимальной группы Ли Г (алгебры Ли) и через $E_1, \ldots, E_n$ — отвечающие им дифференциальные операторы (операторы Ли бесконечно малого сдвига) в X. Группу $\mathfrak{G}$, как известно, мы можем рассматривать как группу линейных преобразований пространства Г (присоединенная группа). Рассмотрим далее кольцо K, элементами которого являются формальные полиномы от $e_1, \ldots, e_n$. При этом два полинома мы считаем равными, если от одного к другому можно перейти с помощью конечного числа операций, состоящих в замене $e_i e_k - e_k e_i$ на $[e_i, e_k] = \sum c_{ik}^j e_j$. Найдем центр кольца K, т. е. полиномы $P(e_1, \ldots, e_n)$, перестановочные со всеми e_i.

Теорема 4. *Для того чтобы полином* $P = aI + \sum a^i e_i + \sum a^{ik} e_i e_k + \cdots$ *из* K *был перестановочен со всеми* e_i, *достаточно, чтобы формы* $\sum a^i \xi_i$, $\sum a^{ik} \xi_i \eta_k, \ldots$ *были инвариантами присоединенной группы. Если* P *записан при этом так, что коэффициент* $a^{ik}, a^{ikl}, \ldots$ *симметричны, то это условие является также необходимым.*

Отсюда мы получаем: если в таких $P(e_1, \ldots, e_n)$ заменить $e_1, \ldots e_n$ дифференциальными операторами Ли $E_1, E_2, \ldots, E_n$, то мы получим дифференциальные операторы, перестановочные со всеми преобразованиями $g \in \mathfrak{G}$ многообразия X (движениями в X).

Рассмотрим примеры. Пусть $\mathfrak{G}$ — группа всех вещественных невырожденных матриц. Роль элементов e_i будут играть матрицы E_{ik}, имеющие единицу на месте пересечения i-й строки и k-го столбца и нуль на всех остальных местах. Применяя теорему 4, мы получаем:

Теорема 5. *Для группы всех невырожденных матриц следующие полиномы от оператора Ли E_{ik} перестановочны со всеми E_{ik}:* $\Delta_1 = \sum\limits_i E_{ii}$, $\Delta_2 = \sum\limits_{i_1, i_2} E_{i_1 i_2} E_{i_2 i_1}$, $\Delta_3 = \sum\limits_{i_1, i_2, i_3} E_{i_1 i_2} E_{i_2 i_3} E_{i_3 i_1}, \ldots,$ $\Delta_n = \sum E_{i_1 i_2} \ldots E_{i_n i_1}$. *Всякий другой полином, перестановочный со всеми E_{ik}, есть полином от $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$.*

Для случая группы матриц с детерминантом 1 Δ_1 отсутствует. Если $\mathfrak{G}$ есть группа матриц второго порядка с детерминантом 1, то ее можно интерпретировать как группу движений плоскости Лобачевского. В этом случае имеется лишь Δ_2, который есть оператор Лапласа на плоскости Лобачевского. Вообще, в случае симметрического риманова пространства среди наших операторов есть оператор второй степени, являющийся оператором Лапласа (вторым дифференциальным параметром Бельтрами) этого пространства. Аналогично группе унимодулярных матриц, можно выписать без труда соответствующие операторы для других полупростых групп. Заметим, что число независимых операторов в симметрическом римановом пространстве равно числу независимых инвариантов пары точек. Если группа $\mathfrak{G}$ полупростая, то среди $P(E_1, \ldots, E_n)$, перестановочных со всеми движениями, есть конечное число таких, что все остальные суть полиномы от них (число независимых среди них равно числу независимых инвариантов пар точек в X). Мы будем эти независимые обозначать $\Delta^{(1)}, \ldots, \Delta^{(n)}$ и называть операторами Лапласа симметрического пространства X.

Теорема 6. *Зональные сферические функции $\varphi_M(x)$ удовлетворяют уравнениям $\Delta^{(i)} \varphi_M(x) = \lambda_i \varphi_M(x)$, где λ_i — числа.*

Таким образом, зональные сферические функции можно охарактеризовать как собственные функции операторов Лапласа, постоянные на сферах с центром в некоторой точке.

Теорема 6 получается как частный случай следующей теоремы.

Теорема 7. *Пусть задано неприводимое унитарное представление $g \to T_g$ группы $\mathfrak{G}$ в гильбертовом пространстве H. При этом элементам e_i инфинитезимальной группы отвечают операторы A_i, вообще говоря, неограниченные в H ([4]). Если $P(e_1, \ldots, e_n)$ из K перестановочен со всеми e_i, то $P(A_1, \ldots, A_n)$ есть оператор, кратный единице.*

Для случая, когда $\mathfrak{G}$ есть комплексная полупростая группа Ли, а $\mathfrak{H}$ — ее максимальная компактная подгруппа, сферические функции явно вычислены в ([5]).

Вопросами, изложенными в этой статье, занимался также независимо М. Г. Крейн, результаты которого отчасти перекрываются с полученными здесь результатами.

Поступило
3 XI 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. М. Гельфанд и М. А. Наймарк, Изв. АН СССР, сер. матем., 12, № 5 (1948). [2] Д. А. Райков, ДАН, 54, № 5 (1946). [3] И. М. Гельфанд и Д. А. Райков, Матем. сборн., 13 (55) : 2—3, 301 (1943). [4] L. Garding, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 33, 331 (1947). [5] И. М. Гельфанд и М. А. Наймарк, ДАН, 58, № 3 (1948).