диапазонах и возможно ли при этом преобразование поляризации электромагнитного излучения? Для этого модель будет облучатся линейно-, циркулярно- и эллиптически- поляризованной волной при различных направлениях её распространения и для различных частот в рассматриваемом диапазоне.

Литература

1. Девятков Н. Д. Миллиметровые волны и их роль в процессах жизнедеятельности / Н. Д. Девятков, М. Б. Голант, О. В. Бецкий. – М.: «Радио и связь», 1991. – 168 с.
2. Бецкий О. В. Миллиметровые волны и живые системы / О. В. Бецкий, В. В. Кислов, Н. Н. Лебедева. – М.: САЙНС-ПРЕСС, 2004. – 272 с.
3. Application_note_variable_BMI [Electronic resource]. – Made of access: https://www.nevaelectromagnetics.com – Date of access: 15.11.17
4. CST MPHYSICS studio [Electronic resource]. – Made of access: ///D:/cst/ Documentation /CST %20EM%20STUDIO%20-%20Workflow%20and %20 Solver%20Overview.pdf – Date of access: 15.02.18.
5. CST Studio suite [Electronic resource]. – Made of access: D:/cst/Documentation/CST%20STUDIO%20SUITE%20-%20Getting%20Started. pdf – Date of access: 10.01.18.
6. CST Microwave studio [Electronic resource]. – Made of access: ///D:/cst/Documentation/CST%20MICROWAVE%20STUDIO%20-20Workflow %20and%20 Solver %20Overview.pdf – Date of access: 15.01.18.
7. CST EM studio [Electronic resource]. – Made of access: ///D:/cst/Documentation /CST %20EM%20STUDIO%20-%20Workflow%20and %20Solver%20Overview.pdf – Date of access: 20.01.18.

В.О. Курбацкий (ГГТУ имени. П.О. Сухого, Гомель)
Науч. рук. **Е.З. Авакян**, канд. физ.-мат. наук, доцент

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕПЛА В ОДНОРОДНОМ СТЕРЖНЕ

Как правило основной задачей при проектировании является получение количественных характеристик физических явлений и расчет с заданной степенью точности хода реальных процессов. Математические модели физики позволяют решать такие задачи полностью.

Уравнение теплопроводности представляет собой математическую модель, описывающую процесс распределения тепла в однородном тонком стержне. Относится к дифференциальным уравнениям второго порядка в частных производных параболического типа.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{1}$$

где $u(x,t)$ – температура стержня в точке x в момент времени t, $0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T$

a – связано с материалом из которого состоит стержень, $\frac{k}{cp} = a^2$.

Чтобы решение уравнения (1) было вполне определенно, функция *u(x,t)* должна удовлетворять краевым условиям.

Условия, которые соответствуют так называемой *первой краевой задаче* для $0 \leq t \leq T$ следующие:

$$u(x, t) = \varphi(x) \tag{2}$$

$$u(0, t) = \psi_1(t) \tag{3}$$

$$u(l, t) = \psi_2(t) \tag{4}$$

Физически условие (2) (*начальное условие*) соответствует тому, что при $t = 0$ в различных сечениях стержня задана температура, равная $\varphi(x)$. Условия (3) и (4) (*граничные условия*) соответствуют тому, что на концах стержня при $x = 0$ и при $x = l$ поддерживается температура, равная $\psi1(t)$ и $\psi2(t)$ соответственно.

Общее решение уравнения методом Фурье:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \, e^{-(\frac{\pi n}{l})^2 a^2 t} \sin\frac{\pi n x}{l}, \tag{5}$$

где коэффициент Фурье $A_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{\pi n x}{l}\,dx$. (6)

Рассмотрим решение конкретной задачи.

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \ 0 < x < l, \ 0 < t \leq T, \ l = 0{,}1\text{м}, \ T = 4c \\ U(x,0) = \varphi(x) = x^2 + 3x, \ U(0,t) = \psi_1(t) = 0, \ U(l,t) = \psi_2(t) = 0{,}31 \cdot (t+1) \end{cases}$$

Теплоемкость вещества стержня $c = 903{,}7 \ \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$.

Плотность вещества стержня $p = 2{,}71 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$.

Коэффициент теплопроводности $k = 237 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$

Для решения конкретной задачи необходимо свести её к задаче с однородными граничными условиями. Произведем замену исходной функции $U(x,t)$ на функцию $V(x,t)$:

$$V(x,t) = U(x,t) - \overline{U}(x,t) \tag{7}$$

где
$$\overline{U}(x,t) = \psi_1(t) + \frac{x}{l}\big(\psi_2(t) - \psi_1(t)\big) \tag{8}$$

Таким образом получим:

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + f(x,t), \ 0 < x < l, \ 0 < t \le T \\ V(x,0) = x^2 + 3x - 0{,}31 \cdot \frac{x}{l}, \ V(0,t) = 0, \ V(l,t) = 0 \end{cases}$$

Разложим полученное уравнение в ряд Фурье по синусам:

$$V(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(t) \sin\frac{\pi n x}{l} \qquad (9)$$

Продифференцировав соответственно уравнению и подставив в него результаты получим:

$$\sum_{n=1}^{\infty} V_n{}'(t) \sin\frac{\pi n x}{l} = -a^2 \sum_{n=1}^{\infty} V_n(t) \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \sin\frac{\pi n x}{l} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{\pi n x}{l} \qquad (10)$$

Занесем все в общий ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi n x}{l} \left(V_n'(t) + \left(a\frac{\pi n}{l}\right)^2 V_n(t) - b_n\right) = 0;$$

$V_n'(t) + \left(a\frac{\pi n}{l}\right)^2 V_n(t) - b_n = 0$, где $b_n = -\frac{0{,}62}{l^2}\int_0^l x \sin\frac{\pi n x}{l} dx = \frac{0{,}62}{\pi n}\cos\pi n$

Таким образом получаем:

$$V_n'(t) + \left(a\frac{\pi n}{l}\right)^2 V_n(t) - \frac{0{,}62}{\pi n}\cos\pi n = 0;$$

Решив полученное уравнение вернемся к формуле (9), подставив решение:

$$V(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{0{,}62}{\pi n} \cdot \left(\frac{l}{a\pi n}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{e^{\left(a\frac{\pi n}{l}\right)^2 t}}\right) \cdot \sin\frac{\pi n x}{l} \qquad (11)$$

Возвращаясь к исходной функции $U(x,t)$ уравнению, получаем:

$$U(x,t) = 0{,}31 \cdot \frac{x}{l} \cdot (t+1) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{0{,}62}{\pi n} \cdot \left(\frac{l}{a\pi n}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{e^{\left(a\frac{\pi n}{l}\right)^2 t}}\right) \cdot \sin\frac{\pi n x}{l} \qquad (12)$$

Решим поставленную задачу методом конечных разностей. Частные производные из основного уравнения заменим соответствующими разностями.

$$\frac{u_{i,\ k+1} - u_{i,\ k}}{l} = a^2 \frac{u_{i+1,\ k} - 2u_{i,\ k} + u_{i-1,\ k}}{h^2} \qquad (13)$$

где $l = \frac{x}{k}, t = kl, k = 1, 2, \ldots,$

$$h = \frac{x}{i}, x = ih, i = 1, 2, \ldots,$$

Таким образом зная 3 подряд идущих значения в -ом ряду, можем получить значение из $k+1$-го ряда:

$$u_{i,\ k+1} = \left(1 - \frac{2a^2 l}{h^2}\right) u_{i,\ k} + a^2 \frac{l}{h^2}\left(u_{i+1,\ k} + u_{i-1,\ k}\right) \qquad (14)$$

Для начала найдем значения в узлах ряда, соответствующего начальному условию (2) при $t = 0$. Значения в крайних точках этого отрезка нам известны в силу формул (3) и (4). Так ряд за рядом мы определим значения искомого решения во всех узлах сетки.

Пользуясь формулой (11) построим графики функции в программе Scilab, обозначим их сплошной линией. Для сравнения построим графики функции на основе значений в узлах сетки, полученных методом конечных разностей, обозначим их штриховой линией.

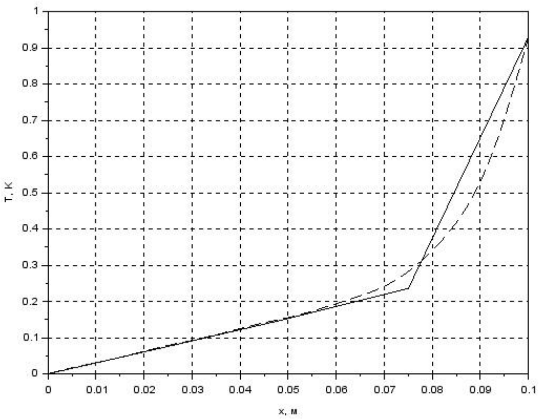

Рисунок 1 – График распределения тепла в стержне длины $l = 0{,}1$ м в момент времени $t_0 = 2$ с

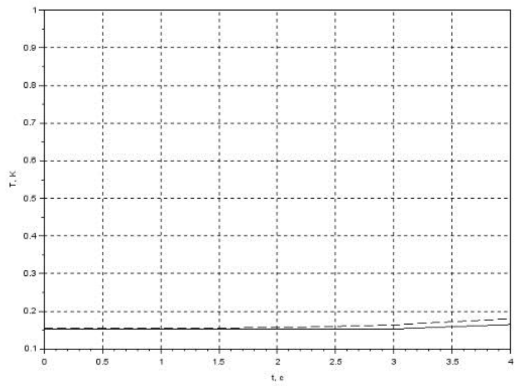

Рисунок 2 – График изменения температуры в стержне в точке $x = 0{,}05$ м за время $0 \le t \le 4$ с

Таким образом практическим путем было доказано, что имея условия, соответствующие первой краевой задаче, основные характеристики материала и зная основное уравнение теплопроводности можно разложить функцию в бесконечный ряд Фурье, и ограничив сумму некоторым целым значением, можно получить точное решение в точке стержня x в момент времени t.

В.А. Лисовский (ГГУ имени Ф.Скорины, Гомель)
Науч. рук. **В.В. Андреев**, д-р физ.-мат. наук, доцент

ИНТЕРНЕТ-ПРАКТИКУМ «ПРОГРАММИРОВАНИЕ СИМВОЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ»

Сегодня Интернет является одним из самых современных и революционных средств передачи информации. Интернет или Всемирную паутину образуют миллионы Web-серверов сети Интернет, расположенных по всему миру.

Ни для кого не секрет, что большинство современных сайтов создается при помощи CMS или просто «движков». Что не удивительно, ведь