А.Р. Казимов (ГГТУ имени П.О. Сухого, Гомель)
Науч. рук. **Е.З. Авакян**, канд. физ.-мат. наук, доцент

ЗАДАЧА О КОЛЕБАНИИ СТРУНЫ

Как правило, основной задачей при проектировании является получение количественных характеристик физических явлений и расчет с заданной степенью точности хода реальных процессов. Математические модели физики позволяют решать такие задачи полностью.

Волновое уравнение в физике – линейное гиперболическое дифференциальное уравнение в частных производных, задающее малые поперечные колебания тонкой мембраны или струны, а также другие колебательные процессы в сплошных средах (акустика, преимущественно линейная: звук в газах, жидкостях и твёрдых телах) и электромагнетизме (электродинамике).

$$\frac{d^2u}{dt^2} = a^2\frac{d^2u}{dx^2}, \tag{1}$$

где $u(x,t)$ – уравнение движения в точке x в момент времени t, $0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T$,

a – отношение модуля силы натяжения к плотности струны, $\frac{\mathrm{T}_0}{\rho} = a^2$.

Итак, будем искать решение уравнения по формуле (1), удовлетворяющее однородным граничным условиям

$U(0, t) = U(l, t) = 0$ (2)

начальным условиям $\begin{cases} U(x,0) = \varphi(x) \\ U_t'(x,0) = \psi(x) \end{cases}$. (3)

Уравнение (2) линейно и однородно, поэтому сумма частных решений также является решением этого уравнения.

Общее решение уравнения методом Фурье:

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}(A_n \cos\left(\frac{\pi n}{l}\right)\alpha t + B_n \sin(\frac{\pi n}{l})\alpha t) \sin(\frac{\pi n}{l})x, \tag{4}$$

Если функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют условиям разложения в ряд Фурье, то

$$\begin{cases} A_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin(\frac{\pi n x}{l})dx \\ B_n = \frac{2}{\pi n \alpha}\int_0^l \psi(x)\sin(\frac{\pi n x}{l})\,dx \end{cases}. \tag{5}$$

Рассмотрим решение конкретной задачи.

Уравнение формы струны: $\phi(x) = 0{,}2x - x^2$, Скорость каждой точки струны: $\Psi(x) = \sin(5\pi x)$, Длинна струны: L=0,2 м, Модуль силы натяжения: $T_0 = 80100$ Н, Плотность струны: $p = 8900\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$

Для решения конкретной задачи необходимо найти коэффициенты A_n, B_n, период функции, а также коэффициент a.

$$A_n = -\frac{0{,}16}{\pi^3 n^3}((-1)^n - 1)$$

$$B_n = \frac{1}{\pi n a}\left(\frac{0{,}2}{\pi(1-n)}\sin\big(\pi(1-n)\big) - \frac{0{,}2}{\pi(1+n)}\sin\big(\pi(1+n)\big)\right)$$

Исходная функция примет вид:

$$\mathrm{U(x,t)} = \left(\frac{0{,}32}{\pi^3}\cdot\cos(15\pi t) + \frac{0.2}{3\pi}\sin(15\pi t)\right)\sin\left(\frac{\pi x}{0.2}\right)$$
$$+\sum_{n=2}^{\infty}\left(-\frac{0{,}16}{\pi^3 n^3}((-1)^n - 1)\cdot\cos\left(\frac{3\pi n t}{0{,}2}\right) + \right.$$
$$\left(\frac{1}{3\pi n}\cdot\left(\frac{0{,}2}{\pi(1-n)}\sin\big(\pi(1-n)\big) - \frac{0{,}2}{\pi(1+n)}\sin\big(\pi(1+n)\big)\right)\right)$$
$$\left.\cdot\sin\left(\frac{3\pi n t}{0{,}2}\right)\right)\sin\left(\frac{\pi n x}{0{,}2}\right)$$

Период данной функции $T = \frac{2l}{a} = \frac{2\cdot 0.2}{3} = 0.13$; $\mathrm{a}^2 = \frac{\mathrm{T_0}}{\rho} = \frac{80100}{8900} = 9$
$\mathrm{a} = 3$

Построим графики функции в программе Scilab при $t = 0; t = \frac{T}{4}$;
$t = \frac{T}{2}$, где $x \in [0; 0{,}2]$, $\mathrm{n} = 1{,}3{,}5$

В центральной точке струны при x=0.1 наша формула примет вид:

$$\mathrm{U(0{,}1,t)} = \left(\frac{0{,}32}{\pi^3}\cdot\cos(15\pi t) + \frac{0.2}{3\pi}\sin(15\pi t)\right)\sin(0{,}5\pi)$$
$$+\sum_{n=2}^{\infty}\left(-\frac{0{,}16}{\pi^3 n^3}((-1)^n - 1)\cdot\cos(15\pi n t)\cdot\sin(0{,}5\pi n)\right)$$

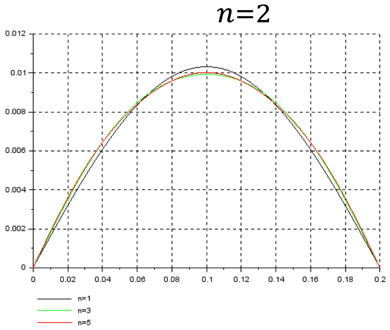

Рисунок 1 – График колебания струны при $\boldsymbol{t = 0; x \in [0; 0.2]}$, $\mathbf{n = 1, 3, 5}$

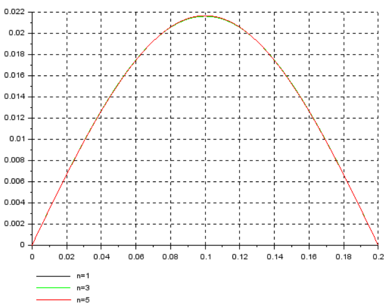

Рисунок 2 – График колебания струны при $\boldsymbol{t = \frac{T}{4}; x \in [0; 0.2]}$, $\mathbf{n = 1, 3, 5}$

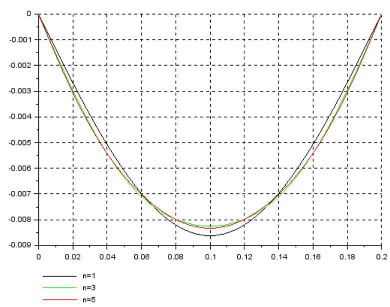

Рисунок 3 – График колебания струны при $\boldsymbol{t = \frac{T}{2}; x \in [0; 0.2]}$, $\mathbf{n = 1, 3, 5}$

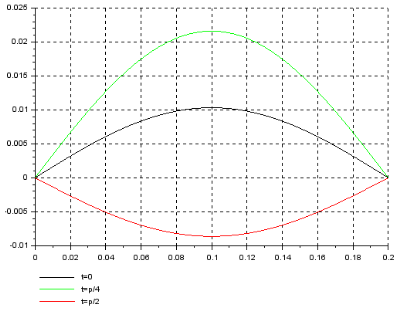

Рисунок 4 – График колебания струны при $\boldsymbol{t = 0; t = \frac{T}{4};}$ $\boldsymbol{t = \frac{T}{2}; x[0; 0.2], \mathrm{n} = 1}$

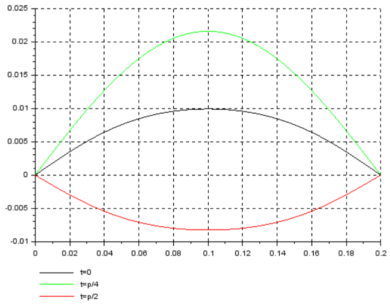

Рисунок 5 – График колебания струны при $\boldsymbol{t = 0; t = \frac{T}{4};}$ $\boldsymbol{t = \frac{T}{2}; x[0; 0.2], \mathrm{n} = 3}$

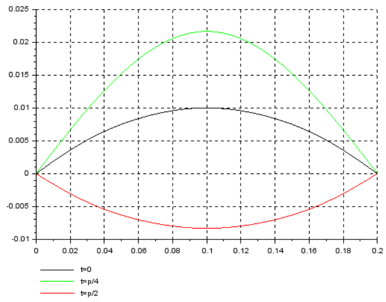

Рисунок 6 – График колебания струны при $\boldsymbol{t = 0; t = \frac{T}{4};}$ $\boldsymbol{t = \frac{T}{2}; x[0; 0.2], \mathrm{n} = 5}$

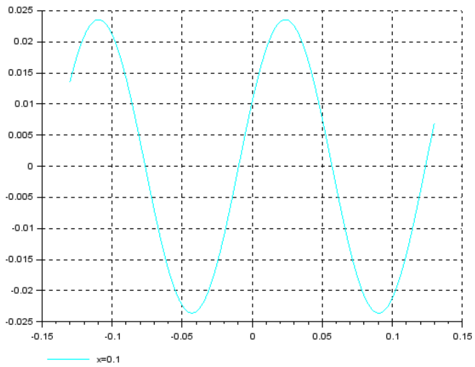

Рисунок 7 – График колебания струны при $t = [-0.13; 0.13]; x = 0.1, \mathrm{n} = 1$

Таким образом в любой момент времени t, в любой части струны, мы можем узнать ее форму.

В.П. Караханов (ГГТУ имени П.О. Сухого, Гомель)
Науч. рук. **В.Ю. Гавриш,** ст. преподаватель

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯДА В ПОСТОЯННОМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

Введение. Изучение физических свойств элементарных частиц связано с моделированием их движения. Особенно большое практическое значение подобные исследования имеют для ускорителей, в которых потоки частиц ускоряются внешним электрическим и магнитным полями.

Цель данной работы – продемонстрировать, как без учета квантово–механических эффектов при различных параметрах смоделировать движение частиц во внешнем электромагнитном поле.