Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXIX, № 2

ФИЗИКА

Б. ДАВЫДОВ

ВАРИАЦИОННЫЙ ПРИНЦИП И КАНОНИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 13 IX 1949)

1. Вариационный принцип для идеальной жидкости можно получить, если в качестве независимо варьируемых переменных рассматривать смещения частиц жидкости из тех положений, которые они занимали в некоторый начальный момент времени, или же, что удобнее, из тех их виртуальных положений, при которых плотность жидкости ρ была бы постоянна.

Немного более простые выражения получаются, если в качестве независимо варьируемых переменных взять сами эти виртуальные положения, т. е. лагранжевы координаты a_k как функции x_k и t.

Условие, что эти координаты для каждой частицы жидкости остаются неизменными, запишется так:

$$\frac{da_k}{dt} = \dot{a}_k + a_{kl} v_l = 0. \tag{1}$$

(Все значки, кроме первых значков a_k, v_k и x_k, означают соответствующие частные производные. По значкам, дважды встречающимся в одном члене, подразумевается суммирование.)

Уравнение (1) позволяет выразить скорость v_k через a_k. Далее имеем:

$$\rho = \frac{D(a_k)}{D(x_k)}. \tag{2}$$

Все это следует подставить в лагранжиан

$$L = \frac{1}{2}\rho v_k^2 - \varepsilon(\rho). \tag{3}$$

Здесь $\varepsilon(\rho)$ — плотность потенциальной энергии;

$$\varepsilon'(\rho) = w(\rho) = \int \frac{dp}{\rho}, \tag{4}$$

где $w(\rho)$ — тепловая функция.

В результате такой подстановки все формулы получаются крайне громоздкими.

2. Мы укажем сейчас более простую форму вариационного принципа, которая приводит к значительно более удобным выражениям.

В лагранжиане (3) мы будем варьировать непосредственно ρ и v_k. Их, очевидно, нельзя варьировать в разных точках независимо и необходимо наложить какие-то добавочные условия. Попытаемся сформулировать эти условия.

Прежде всего должно, конечно, выполняться уравнение непрерывности:

$$\dot{\rho} + (\rho v_k)_k = 0. \tag{5}$$

Если ограничиться одним этим добавочным условием, то получаются уравнения для безвихревой жидкости.

В механике точки при варьировании координат их значения в начальный и конечный моменты времени не варьируются. Для получения вихревой жидкости нам необходимо ввести аналогичное условие для всех частиц жидкости. Для этого нужно закрепить значения их лагранжевых координат в начальный и конечный моменты времени. Как будет видно из дальнейшего, нет нужды вводить три лагранжевы координаты: для получения уравнений гидродинамики достаточно ввести одну из них — мы обозначим ее α. Подобно (1), имеем:

$$\dot{\alpha} + \alpha_k v_k = 0. \tag{6}$$

Потребовав, чтобы при варьировании выполнялось условие (6) и чтобы значения α в начальный и конечный моменты времени не варьировались, мы закрепим одну координату каждой частицы жидкости в эти моменты.

Умножим левые стороны (5) и (6) на неопределенные множители $-\lambda$ и φ, также являющиеся функциями x_k и t, прибавим к лагранжиану (3) и будем варьировать все величины независимо. Мы получаем:

$$L_1 = \frac{1}{2}\rho v_k^2 - \varepsilon(\rho) - \lambda(\dot{\alpha} + \alpha_k v_k) + \varphi[\dot{\rho} + (\rho v_k)_k] \ . \tag{7}$$

Составляем теперь уравнения Эйлера. Вариационные производные по λ и φ дают (5) и (6). Дифференцирование по α, ρ и v_k дает, соответственно,

$$\dot{\lambda} + (\lambda v_k)_k = 0, \tag{8}$$

$$\dot{\varphi} - \frac{1}{2} v_k^2 + v_k \varphi_k + \varepsilon'(\rho) = 0, \tag{9}$$

$$\rho v_k = \lambda \alpha_k + \rho \varphi_k. \tag{10}$$

Если положить

$$\lambda = \rho\beta, \tag{11}$$

то вместо (8) и (10) получается:

$$\dot{\beta} + \beta_k v_k = 0 \tag{12}$$

и

$$v_k = \beta\alpha_k + \varphi_k. \tag{13}$$

Равенство (10) позволяет исключить v_k из L_1. Добавляя, кроме того, полный дифференциал $\alpha\dot{\lambda} + \dot{\alpha}\lambda$, получаем:

$$L_2 = -\frac{1}{2\rho}(\lambda\alpha_k + \rho\varphi_k)^2 - \varepsilon(\rho) + \alpha\dot{\lambda} + \varphi\dot{\rho}. \tag{14}$$

В результате варьирования отсюда получается та же система уравнений. Из нее легко получить и обычные уравнения гидродинамики. Согласно (13),

$$\dot{v}_k = \dot{\beta}\alpha_k + \beta\dot{\alpha}_k + \dot{\varphi}_k.$$

Подставляя сюда вместо производных по времени их значения согласно (6), (9) и (12), получаем уравнение Эйлера:

$$\dot{v}_k + v_l v_{kl} + \varepsilon'_k(\rho) = 0. \tag{15}$$

Далее имеем:

$$v_{kl} - v_{lk} = \alpha_k \beta_l - \alpha_l \beta_k. \tag{16}$$

Переходим к каноническим уравнениям. Импульсы, сопряженные с варьируемыми переменными в (14), будут:

$$p_\lambda = \alpha, \quad p_\rho = \varphi; \quad p_\alpha = p_\varphi = 0. \tag{17}$$

Таким образом, мы имеем две пары канонически сопряженных переменных: λ и α, ρ и φ.

Гамильтониан:

$$H = \alpha\dot{\lambda} + \varphi\dot{\rho} - L_2 = \frac{1}{2\rho}(\lambda\alpha_k + \rho\varphi_k)^2 + \varepsilon(\rho). \tag{18}$$

Добавочные члены из (14) здесь выпали, и получилась просто сумма кинетической и потенциальной энергии, как это и должно быть.

Теперь легко составить гамильтоновы уравнения. Имеем:

$$\dot{\lambda} = \frac{\delta H}{\delta \alpha} = \frac{\partial H}{\partial \alpha} - \left(\frac{\partial H}{\partial \alpha_k}\right)_k$$

и т. д. Это приводит опять к уравнениям (5), (6), (8) и (9), причем скорость v_k определяется равенством (13). Таким образом, канонические уравнения у нас совпадают с уравнениями Лагранжа. Уравнение (8) для λ по форме совпадает с обычным уравнением непрерывности (5). Эквивалентное ему уравнение (12) показывает, что β, так же как и α, согласно (6), является лагранжевой координатой. Наконец, (9) является обобщением уравнения Бернулли.

Как мы уже говорили, если не накладывать добавочного условия (6) и ограничиться только условием (5), то получаются уравнения для безвихревой жидкости. Они получаются из написанной выше системы уравнений, если положить $\alpha = \text{const}$ или $\beta = 0$. При этом остается только одна пара канонических переменных: ρ и φ.

Укажем простейшие решения канонических уравнений:

1) Потенциальное течение: $\frac{1}{2}v_k^2 + \varepsilon'(\rho) = C$.

$$v_k = \varphi_k; \quad \alpha = \text{const}; \quad \varphi = \varphi_0(x_k) - Ct.$$

2) Вихревое течение при $\rho = \text{const}$; $v_1 = cx_2$, $v_2 = v_3 = 0$.

$$\alpha = x_1 - cx_2 t; \quad \beta = cx_2; \quad \varphi = \frac{1}{2}c^2 x_2^2 t - \varepsilon'(\rho)\, t.$$

3. Канонические переменные (17) позволяют обычным путем перейти к квантовой жидкости. При этом α и λ, φ и ρ должны рассматриваться, как операторы p_i, q_i ($i = 1, 2$), подчиняющиеся перестановочным соотношениям:

$$[p_{i1},\ q_{j2}] = p_i(\mathbf{r}_1)\, q_j(\mathbf{r}_2) - q_j(\mathbf{r}_2)\, p_i(\mathbf{r}_1) = \frac{h}{i}\,\delta_{ij}\,\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2). \tag{19}$$

Это дает:

$$[\alpha_1,\ \lambda_2] = [\varphi_1,\ \rho_2] = \frac{h}{i}\,\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2). \tag{20}$$

Остальные скобки равны нулю. Скорость v_k определяется:

$$v_k = \frac{1}{2\rho}(\lambda\alpha_k + \alpha_k\lambda) + \varphi_k. \tag{21}$$

Отсюда, при помощи (20), легко найти перестановочные соотношения для v_k:

$$[v_{k1},\ \rho_2] = \frac{h}{i}\,\delta_k(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2), \tag{22}$$

$$[v_{k1},\ v_{l2}] = \frac{h}{2i}\left[\frac{\lambda_1\alpha_{l2} + \alpha_{l2}\lambda_1}{\rho_1\rho_2}\,\delta_k(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) - \frac{\lambda_2\alpha_{k1} + \alpha_{k1}\lambda_2}{\rho_1\rho_2}\,\delta_l(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) + \right.$$
$$\left. + \frac{\lambda_1\alpha_{k1} + \alpha_{k1}\lambda_1}{\rho_1^2}\,\delta_l(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) - \frac{\lambda_2\alpha_{l2} + \alpha_{l2}\lambda_2}{\rho_2^2}\,\delta_k(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\right]. \tag{23}$$

Подобные перестановочные соотношения были ранее получены Л. Д. Ландау ([1]) другим методом.

Гамильтониан (18) позволяет написать уравнение Шредингера для квантовой жидкости. Функционал Ψ будет при этом зависеть от двух из канонических переменных, например от λ и ρ. Другие две нужно тогда заменить операторами:

$$\alpha = \frac{h}{i}\,\frac{\delta}{\delta\lambda}, \quad \varphi = \frac{h}{i}\,\frac{\delta}{\delta\rho}, \tag{24}$$

и уравнение имеет вид:

$$\frac{h}{i}\,\dot{\Psi} = \mathbf{H}\Psi, \quad \text{где } \mathbf{H} = \int H\,(dx_k). \tag{25}$$

При этом оператор H нужно симметризовать:

$$H = \frac{1}{2}\,v_k\rho v_k + \varepsilon(\rho) \tag{26}$$

(ср. ([1])). С перестановочными соотношениями (22) и (23) уравнение движения для v_k:

$$\dot{v}_k = \frac{i}{h}\,(\mathbf{H}v_k - v_k\mathbf{H})$$

дает уравнение Эйлера:

$$\dot{v}_k + \frac{1}{2}\,(v_l v_{kl} + v_{kl} v_l) + \varepsilon_k'(\rho) = 0. \tag{27}$$

Поступило
15 VII 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. Ландау, ЖЭТФ, 11, 592 (1941).