Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXIX, № 3

ФИЗИКА

В. В. СОБОЛЕВ

О ДИФФУЗНОМ ОТРАЖЕНИИ И ПРОПУСКАНИИ СВЕТА ПЛОСКИМ СЛОЕМ МУТНОЙ СРЕДЫ

(Представлено академиком С. И. Вавиловым 12 IX 1949)

В настоящей заметке дается новый метод решения классической задачи о диффузном отражении и пропускании света плоским слоем мутной среды. Этот метод, уже изложенный автором ранее для случая сферической индикатрисы рассеяния (1) и обобщаемый теперь на случай индикатрисы рассеяния произвольного вида, состоит в нахождении линейных интегральных уравнений, определяющих непосредственно интенсивности излучения, выходящего из среды. Полученные уравнения легко решаются численно — и в этом состоит пока единственный путь для нахождения точных решений для слоя конечной оптической толщины. В случае же бесконечно толстого слоя для определения интенсивностей диффузно-отраженного и диффузно-пропущенного света получаются интегральные уравнения с ядрами типа Коши, точные решения которых находятся в явном виде.

1. Пусть плоский слой мутной среды освещается параллельными лучами, интенсивность которых есть πS, косинус угла падения ζ и азимут φ_0. Обозначим через $I(\tau, \eta, \varphi)$ интенсивность диффузного излучения, идущего на оптической глубине τ под углом с нормалью, косинус которого равен η, при азимуте φ. Для определения величины $I(\tau, \eta, \varphi)$ мы имеем следующие уравнения:

$$\eta \frac{dI(\tau, \eta, \varphi)}{d\tau} = B(\tau, \eta, \varphi) - I(\tau, \eta, \varphi), \tag{1}$$

$$B(\tau, \eta, \varphi) = \frac{\lambda}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_{-1}^{+1} I(\tau, \eta', \varphi')\, x(\gamma)\, d\eta' + \frac{S}{4} x(\gamma_1)\, e^{-\tau/\zeta}, \tag{2}$$

где $\lambda/(1-\lambda)$ — отношение коэффициента рассеяния к коэффициенту истинного поглощения, $x(\gamma)$ — индикатриса рассеяния, выражающая вероятность рассеяния излучения элементарным объемом среды под углом γ с направлением падающего излучения.

$$\begin{aligned} \cos\gamma &= \eta\eta' + \sqrt{(1-\eta^2)(1-\eta'^2)}\cos(\varphi-\varphi'), \\ \cos\gamma_1 &= \eta\zeta + \sqrt{(1-\eta^2)(1-\zeta^2)}\cos(\varphi-\varphi_0). \end{aligned} \tag{3}$$

Введем в рассмотрение «обобщенные коэффициенты яркости» $F(\eta, \eta', \varphi)$ и $G(\eta, \eta', \varphi)$, определенные соотношениями:

$$\begin{aligned} S\zeta F(\eta, \eta', \varphi) &= \int_0^{\tau_0} B(\tau, -\eta', \varphi)\, e^{-\tau/\eta} \frac{d\tau}{\eta}, \\ S\zeta G(\eta, \eta', \varphi) &= \int_0^{\tau_0} B(\tau, \eta', \varphi)\, e^{-\tau/\eta} \frac{d\tau}{\eta}, \end{aligned} \tag{4}$$

где τ_0 — оптическая толщина среды. Искомые коэффициенты яркости

$$\rho(\eta, \varphi) = F(\eta, \eta, \varphi), \quad \sigma(\eta, \eta) = G(\eta, \eta, \varphi). \tag{5}$$

Поступая так же, как в предыдущей заметке, мы получаем слёдующие уравнения для нахождения величин F и G:

$$F(\eta'', \eta, \varphi) = \frac{\lambda}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_{-1}^{+1} \frac{\eta'' F(\eta'', \eta', \varphi') - \eta' F(\eta', \eta', \varphi')}{\eta'' - \eta'} x(\gamma)\, d\eta' -$$

$$- \frac{\lambda}{4\pi} e^{-\tau_0/\eta''} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^1 \frac{\eta'}{\eta'' + \eta'} \sigma(\eta', \varphi') x(\gamma)\, d\eta' + x(\gamma_2) \rho^*(\eta''), \tag{6}$$

$$G(\eta'', \eta, \varphi) = \frac{\lambda}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_{-1}^{+1} \frac{\eta'' G(\eta'', \eta', \varphi') - \eta' G(\eta', \eta', \varphi')}{\eta'' - \eta'} x(\gamma)\, d\eta' -$$

$$- \frac{\lambda}{4\pi} e^{-\tau_0/\eta''} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^1 \frac{\eta'}{\eta'' + \eta'} \rho(\eta', \varphi') x(\gamma)\, d\eta' + x(\gamma_1) \sigma^*(\eta''), \tag{7}$$

где надо считать $F(\eta', \eta', \varphi') = 0$ и $G(\eta', \eta', \varphi') = 0$ при $\eta' < 0$,

$$\rho^*(\eta'') = \frac{\lambda}{4} \frac{1 - e^{-\tau_0\left(\frac{1}{\eta''} + \frac{1}{\zeta}\right)}}{\eta'' + \zeta}, \quad \sigma^*(\eta'') = \frac{\lambda}{4} \frac{e^{-\frac{\tau_0}{\eta''}} - e^{-\frac{\tau_0}{\zeta}}}{\eta'' - \zeta}, \tag{8}$$

$$\cos\gamma_2 = -\eta\zeta + \sqrt{(1 - \eta^2)(1 - \zeta^2)} \cos(\varphi - \varphi_0). \tag{9}$$

2. Допустим, что $x(\gamma)$ разложена в ряд по полиномам Лежандра:

$$x(\gamma) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i P_i(\cos\gamma). \tag{10}$$

В таком случае

$$x(\gamma) = \sum_{m=0}^{\infty} \cos m(\varphi - \varphi') \sum_{i=m}^{\infty} c_{im} P_i^m(\eta) P_i^m(\eta'), \tag{11}$$

где
$$c_{i0} = x_i, \quad c_{im} = 2x_i \frac{(i-m)!}{(i+m)!}. \tag{12}$$

Величины F и G мы будем искать в виде:

$$F(\eta'', \eta, \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} \cos m(\varphi - \varphi_0) \sum_{i=m}^{\infty} u_i^m(\eta'') P_i^m(\eta),$$
$$G(\eta'', \eta, \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} \cos m(\varphi - \varphi_0) \sum_{i=m}^{\infty} v_i^m(\eta'') P_i^m(\eta). \tag{13}$$

Подставляя (11) и (13) в уравнения (6) и (7), находим:

$$u_i^m(\eta) = \frac{\lambda}{2} x_i \frac{(i-m)!}{(i+m)!} \sum_{j=m}^{\infty} \left\{ \int_{-1}^{+1} \frac{\eta u_j^m(\eta) - \eta' u_j^m(\eta')}{\eta - \eta'} P_j^m(\eta') P_i^m(\eta')\, d\eta' - \right.$$

$$\left. - e^{-\tau_0/\eta} \int_0^1 \frac{\eta'}{\eta + \eta'} v_j^m(\eta') P_j^m(\eta') P_i^m(\eta')\, d\eta' \right\} + c_{im} P_i^m(-\zeta) \rho^*(\eta), \tag{14}$$

$$v_i^m(\eta) = \frac{\lambda}{2} x_i \frac{(i-m)!}{(i+m)!} \sum_{j=m}^{\infty} \left\{ \int_{-1}^{+1} \frac{\eta v_j^m(\eta) - \eta' v_j^m(\eta')}{\eta - \eta'} P_j^m(\eta') P_i^m(\eta')\, d\eta' - \right.$$

$$\left. - e^{-\tau_0/\eta} \int_0^1 \frac{\eta'}{\eta + \eta'} u_j^m(\eta') P_j^m(\eta') P_i^m(\eta')\, d\eta' \right\} + c_{im} P_i^m(\zeta)\, \sigma^*(\eta). \qquad (15)$$

Таким образом, для каждого m мы имеем отдельную систему линейных интегральных уравнений, определяющих $u_i^m(\eta)$ и $v_i^m(\eta)$.

Согласно (5) и (13) искомые коэффициенты яркости следующим образом выражаются через функции $u_i^m(\eta)$ и $v_i^m(\eta)$:

$$\rho(\eta, \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} \rho_m(\eta) \cos m(\varphi - \varphi_0), \quad \sigma(\eta, \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} \sigma_m(\eta) \cos m(\varphi - \varphi_0), \qquad (16)$$

где
$$\rho_m(\eta) = \sum_{i=m}^{\infty} u_i^m(\eta) P_i^m(\eta), \quad \sigma_m(\eta) = \sum_{i=m}^{\infty} v_i^m(\eta) P_i^m(\eta). \qquad (17)$$

3. Нетрудно найти уравнения, определяющие непосредственно $\rho_m(\eta)$ и $\sigma_m(\eta)$. Для этого преобразуем уравнения (14) и (15) к виду:

$$u_i^m(\eta) = \frac{\lambda}{2} x_i \frac{(i-m)!}{(i+m)!} \left\{ \int_{-1}^{+1} \frac{\eta \rho_m(\eta) - \eta' \rho_m(\eta')}{\eta - \eta'} P_i^m(\eta')\, d\eta' - \right.$$

$$- \eta \sum_{j=m}^{\infty} u_j^m(\eta) \int_{-1}^{+1} \frac{P_j^m(\eta) - P_j^m(\eta')}{\eta - \eta'} P_i^m(\eta')\, d\eta' -$$

$$\left. - e^{-\tau_0/\eta} \int_0^1 \frac{\eta'}{\eta + \eta'} \sigma_m(\eta') P_i^m(\eta')\, d\eta' \right\} + c_{im} P_i^m(-\zeta)\, \rho^*(\eta), \qquad (18)$$

$$v_i^m(\eta) = \frac{\lambda}{2} x_i \frac{(i-m)!}{(i+m)!} \left\{ \int_{-1}^{+1} \frac{\eta \sigma_m(\eta) - \eta' \sigma_m(\eta')}{\eta - \eta'} P_i^m(\eta')\, d\eta' - \right.$$

$$- \eta \sum_{j=m}^{\infty} v_j^m(\eta) \int_{-1}^{+1} \frac{P_j^m(\eta) - P_j^m(\eta')}{\eta - \eta'} P_i^m(\eta')\, d\eta' -$$

$$\left. - e^{-\tau_0/\eta} \int_0^1 \frac{\eta'}{\eta + \eta'} \rho_m(\eta') P_i^m(\eta')\, d\eta' \right\} + c_{im} P_i^m(\zeta)\, \sigma^*(\eta). \qquad (19)$$

Уравнения (18) и (19) можно рассматривать как системы линейных алгебраических уравнений относительно $u_i^m(\eta)$ и $v_i^m(\eta)$. Находя из этих уравнений функции $u_i^m(\eta)$ и $v_i^m(\eta)$ и подставляя их в соотношения (17), мы для каждого m действительно получаем два линейных интегральных уравнения для определения $\rho_m(\eta)$ и $\sigma_m(\eta)$. После нахождения этих величин полные коэффициенты яркости составляются, как уже сказано, по формулам (16).

4. Рассматриваемая задача сильно упрощается в случае бесконечно большой оптической толщины слоя мутной среды. Так например, при индикатрисе рассеяния в форме $x(\gamma) = 1 + x_1 \cos\gamma$ коэффициент отражения определяется уравнениями

$$\rho_0(\eta) = \frac{\lambda}{2}\int\limits_{-1}^{+1} \frac{\eta\rho_0(\eta) - \eta'\rho_0(\eta')}{\eta - \eta'}[1 + (1-\lambda)\varkappa_1\eta\eta']\,d\eta' + \frac{\lambda}{4}\,\frac{1-(1-\lambda)\varkappa_1\eta\zeta}{\eta+\zeta}, \quad (20)$$

$$u_1'(\eta) = \frac{\lambda}{4}\varkappa_1\int\limits_{-1}^{+1}\frac{\eta u_1'(\eta) - \eta' u_1'(\eta')}{\eta-\eta'}(1-\eta'^2)\,d\eta' + \frac{\lambda}{4}\varkappa_1\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\eta+\zeta}, \quad (21)$$

а коэффициент пропускания — единственным уравнением:

$$\sigma(\eta) = \frac{\lambda}{2}\int\limits_{-1}^{+1}\frac{\eta\sigma(\eta) - \eta'\sigma(\eta')}{\eta-\eta'}[1 + (1-\lambda)\varkappa_1\eta\eta']\,d\eta', \quad (22)$$

так как при $\tau_0 = \infty$ интенсивность диффузно-пропущенного света не зависит от азимута.

С помощью приема, изложенного выше, аналогичные уравнения могут быть написаны для любой индикатрисы рассеяния. Все эти уравнения имеют ядра типа Коши и их решения можно получить в явном виде. Для любой индикатрисы рассеяния коэффициент пропускания определяется уравнением вида:

$$\sigma(\eta) = \frac{\lambda}{2}\int\limits_{-1}^{+1}\frac{\eta\sigma(\eta) - \eta'\sigma(\eta')}{\eta-\eta'}A(\eta,\eta')\,d\eta', \quad (23)$$

где $A(\eta, \eta')$ — полином относительно η и η', находимый из (17) и (19) при $\tau_0 = \infty$ и $m = 0$. Уравнение (23) может быть переписано в форме

$$\sigma(\eta)\,a(\eta) = \frac{\lambda}{2}\int\limits_0^1\frac{\eta'}{\eta'-\eta}A(\eta',\eta')\,\sigma(\eta')\,d\eta' + f(\eta), \quad (24)$$

где

$$a(\eta) = 1 + \frac{\lambda}{2}\eta\int\limits_{-1}^{+1}\frac{A(\eta,\eta')}{\eta'-\eta}\,d\eta', \quad f(\eta) = \frac{\lambda}{2}\int\limits_0^1\frac{A(\eta,\eta') - A(\eta',\eta')}{\eta-\eta'}\sigma(\eta')\eta'\,d\eta'. \quad (25)$$

Применяя метод Карлемана [2], получаем решение (24) в виде:

$$\sigma(\eta) = \frac{a(\eta)\,f(\eta)}{a^2(\eta) + \left[\frac{\lambda}{2}\pi\eta A(\eta,\eta)\right]^2} +$$

$$+ \frac{e^{\omega(\eta)}}{\sqrt{a^2(\eta) + \left[\frac{\lambda}{2}\pi\eta A(\eta,\eta)\right]^2}}\left\{\frac{\lambda}{2}\int\limits_0^1\frac{\eta' A(\eta',\eta')\,f(\eta')\,e^{-\omega(\eta')}}{\sqrt{a^2(\eta') + \left[\frac{\lambda}{2}\pi\eta' A(\eta',\eta')\right]^2}}\,\frac{d\eta'}{\eta'-\eta} + \frac{C}{1-\eta}\right\}, \quad (26)$$

где

$$\omega(\eta) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^1 \operatorname{arc\,tg}\frac{\frac{\lambda}{2}\pi\eta' A(\eta',\eta')}{a(\eta')}\,\frac{d\eta'}{\eta'-\eta} \quad (27)$$

и C — произвольная постоянная. Коэффициенты полинома $f(\eta)$ определяются при подстановке (26) в (25).

Поступило
15 IV 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. В. Соболев, ДАН, 61, № 5 (1948). [2] T. Carleman, Arkiv f. matematik, astronomi och fysik, 16, No. 26 (1922).