Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXIX, № 3

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Н. А. БРАЗМА

РЕШЕНИЕ ОСНОВНОЙ ЗАДАЧИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПРОЦЕССОВ В МНОГОПРОВОДНОЙ СИСТЕМЕ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 24 IX 1949)

1. Задача о распространении электромагнитных процессов в многопроводной сети, как известно, описывается обобщенной системой телеграфных уравнений [1]:

$$-\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial x} = \mathrm{R}\mathrm{i} + \mathrm{L}\frac{\partial \mathrm{i}}{\partial t},$$
$$-\frac{\partial \mathrm{i}}{\partial x} = \mathrm{G}\mathrm{u} + \mathrm{C}\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial t}, \tag{1}$$

где u и i — колонные матрицы, элементы которых $u_r(x, t)$ и $i_r(x, t)$ $(r = 1, 2, \ldots, n)$ являются, соответственно, напряжениями относительно нулевого провода и токами отдельных проводов; R, L, G и C — квадратные матрицы n-порядка, соответственно, сопротивления, индуктивности, проводимости изоляции и емкости.

Система (1) приводится к матричному телеграфному уравнению

$$\frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial x^2} = \mathrm{A}_1\frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial t^2} + \mathrm{A}_2\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial t} + \mathrm{A}_3\mathrm{u} \tag{2}$$

с коэффициентами:

$$\mathrm{A}_1 = \mathrm{LC} = \|a_{ij}^{(1)}\|, \quad \mathrm{A}_2 = \mathrm{LG} + \mathrm{RC} = \|a_{ij}^{(2)}\|, \quad \mathrm{A}_3 = \mathrm{RG} = \|a_{ij}^{(3)}\|.$$

В работе [2] я рассматривал решение уравнения (2) в интервале $0 < x < l$ для значений времени $t > 0$ при граничных условиях

$$\mathrm{u}(0, t) = 0, \qquad \mathrm{u}(l, t) = 0 \tag{3}$$

и начальных условиях

$$\mathrm{u}(x, 0) = \mathrm{f}^{(1)}(x), \qquad \mathrm{u}'_t(x, 0) = \mathrm{f}^{(2)}(x). \tag{4}$$

При этом я пользовался матричным методом Фурье, который заключается в отыскании частных решений вида

$$\mathrm{u}(x, t) = \mathrm{T}(t)\,\mathrm{x}(x)$$

и составлении суммы этих частных решений. Матрицы $\mathrm{T}(t)$ и $\mathrm{x}(x)$ оказались решениями некоторых матричных дифференциальных уравнений.

2. В настоящей заметке мы рассмотрим решение уравнения (2) при граничных условиях

$$\mathfrak{u}(0, t) = \mathfrak{u}_0 = \text{const}, \qquad \mathfrak{u}(l, t) = 0 \tag{5}$$

и начальных условиях

$$\mathfrak{u}(x, 0) = 0, \qquad \mathfrak{u}'_t(x, 0) = 0. \tag{6}$$

Будем рассматривать случай двух проводов ($n = 2$), однако все рассуждения настоящей заметки непосредственно обобщаются на любое n.

Матричную функцию $\mathfrak{u}$ ищем в виде суммы:

$$\mathfrak{u}(x, t) = \mathfrak{v}(x, t) + \mathfrak{f}(x), \tag{7}$$

причем $\mathfrak{f}(x)$ определяем так, чтобы она удовлетворяла уравнению (2) и граничным условиям

$$\mathfrak{f}(0) = \mathfrak{u}_0, \qquad \mathfrak{f}(l) = 0. \tag{8}$$

Тогда получаем, при некоторых предположениях, для $\mathfrak{f}(x)$ выражение:

$$\mathfrak{f}(x) = \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\mathrm{RG}}\,(l - x)}{\operatorname{sh} \sqrt{\mathrm{RG}}\,l}\,\mathfrak{u}_0, \tag{9}$$

причем это матричное выражение имеет определенный смысл на основании теории функций от матрицы. Матричная же функция $\mathfrak{v}(x, t)$ должна быть решением задачи, рассмотренной в предыдущей работе [2], при начальных условиях частного вида:

$$\mathfrak{v}(x, 0) = -\mathfrak{f}(x), \qquad \mathfrak{v}'_t(x, 0) = 0. \tag{10}$$

Для $\mathfrak{v}(x, t)$ получаем выражение:

$$\mathfrak{v}(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{4} c\binom{\nu}{k}\,\mathfrak{a}\binom{\nu}{k} e^{\lambda\binom{\nu}{k} t} \sin\frac{k\pi x}{l}, \tag{11}$$

причем $\lambda\binom{\nu}{k}$ ($\nu = 1, 2, 3, 4$) являются корнями алгебраического уравнения 4-й степени:

$$\begin{vmatrix} a_{11}^{(1)}\lambda^2 + a_{11}^{(2)}\lambda + a_{11}^{(3)} + \dfrac{k^2\pi^2}{l^2} & a_{12}^{(1)}\lambda^2 + a_{12}^{(2)}\lambda + a_{12}^{(3)} \\ a_{21}^{(1)}\lambda^2 + a_{21}^{(2)}\lambda + a_{21}^{(3)} & a_{22}^{(1)}\lambda^2 + a_{22}^{(2)}\lambda + a_{22}^{(3)} + \dfrac{k^2\pi^2}{l^2} \end{vmatrix} = 0; \tag{12}$$

элементы колонной матрицы $\mathfrak{a}\binom{\nu}{k}$ являются соответствующими алгебраическими дополнениями детерминанта (12); $c\binom{\nu}{k}$ являются численными коэффициентами, которые надо определить из начальных условий (10).

Коэффициенты $c\binom{\nu}{k}$ $(\nu=1,2,3,4)$ оказываются решением системы уравнений:

$$\sum_{\nu=1}^{4} \mathrm{a}\binom{\nu}{k} c\binom{\nu}{k} = -\frac{2}{l}\int_0^l \mathrm{f}(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx = -\frac{2}{l}\left(\mathrm{RG}+\frac{k^2\pi^2}{l^2}\right)^{-1}\frac{k\pi}{l}\mathrm{u}_0, \tag{13}$$

$$\sum_{\nu=1}^{4} \mathrm{a}\binom{\nu}{k}\lambda\binom{\nu}{k} c\binom{\nu}{k} = 0.$$

Решение системы (13) получаем по формулам Крамера в предположении, что детерминант этой системы отличен от нуля. Решение дальше преобразуем, пользуясь произведением матриц:

$$c\binom{\nu}{k} = -\frac{2}{l}\cdot\frac{1}{\Delta^{(k)}}\,\mathrm{b}\binom{\nu}{k}'\left(\mathrm{RG}+\frac{k^2\pi^2}{l^2}\right)^{-1}\frac{k\pi}{l}\mathrm{u}_0 \quad (\nu=1,2,3,4). \tag{14}$$

При этом $\Delta^{(k)}$ обозначает детерминант системы (13), $\mathrm{b}\binom{\nu}{k}'$ — строчную матрицу, элементы которой являются соответствующими алгебраическими дополнениями детерминанта $\Delta^{(k)}$. Введем еще новую квадратную матрицу:

$$\mathrm{C}\binom{\nu}{k} = \frac{1}{\Delta^{(k)}}\,\mathrm{a}\binom{\nu}{k}\mathrm{b}\binom{\nu}{k}'. \tag{15}$$

Подставив выражения (14) и (15) в формулу (11), получаем наконец:

$$\mathrm{v}(x,t) = -\frac{2}{l}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left[\sum_{\nu=1}^{4}\mathrm{C}\binom{\nu}{k}e^{\lambda\binom{\nu}{k}t}\right]\left(\mathrm{RG}+\frac{k^2\pi^2}{l^2}\right)^{-1}\frac{k\pi}{l}\sin\frac{k\pi x}{l}\right\}\mathrm{u}_0, \tag{16}$$

что, совместно с (9), дает формальное решение поставленной задачи. Затем, пользуясь системой (1), можно получить соответствующее выражение для матрицы сил тока.

3. Займемся некоторыми вопросами, связанными со сходимостью рядов (11) и (16).

При $t=0$ ряд (11), а следовательно, также ряд (16), есть ряд Фурье матричной функции — $\mathrm{f}(x)$, и отсюда следует сходимость этих рядов ввиду непрерывности $\mathrm{f}(x)$ и существования $\mathrm{f}'(x)$. Кроме того, из свойств $\mathrm{f}(x)$ следует, что элементы общего матричного коэффициента Фурье ряда (11) являются величинами не ниже первого порядка относительно $1/k$ при $k\to\infty$.

При значениях времени $t>0$ существенное значение для рядов (11) и (16) имеет знак вещественной части $\lambda\binom{\nu}{k}$ $(\nu=1, 2, 3, 4)$, т. е. корней уравнения (12). Для выяснения этого знака преобразуем уравнение (12) к виду:

$$a_0\lambda^4 + a_1\lambda^3 + \left(a_2 + b_2\frac{k^2\pi}{l^2}\right)\lambda^2 + \left(a_3 + b_3\frac{k^2\pi^2}{l^2}\right)\lambda + \\ + \left(a_4 + b_4\frac{k^2\pi^2}{l^2} + \frac{k^4\pi^4}{l^4}\right) = 0 \tag{17}$$

и затем применяем известную теорему Гурвица об уравнениях, все корни которых обладают отрицательной вещественной частью. Таким образом оказывается, что все уравнения (17) имеют отрицательную вещественную часть тогда и только тогда, если

$$\varphi(k) \equiv [b_3(a_1b_2 - a_0b_3) - a_1^2]\frac{k^4\pi^4}{l^4} + \\ + [a_3(a_1b_2 - a_0b_3) + b_3(a_1a_2 - a_0a_3)]\frac{k^2\pi^2}{l^2} + [a_3(a_1a_2 - a_0a_3) - a_1^2a_4] > 0. \tag{18}$$

Из следующего рассуждения видно, что при достаточно малых коэффициентах взаимного влияния проводов приходится ожидать все $\lambda\binom{\nu}{k}$ с отрицательной вещественной частью. Если между проводами взаимного влияния совсем нет, то в детерминанте (12) остаются только элементы главной диагонали, и уравнение (12) распадается на два квадратных уравнения, соответствующих двум одиночным проводам. Но для одиночных проводов, как известно, λ обладает всегда отрицательной вещественной частью. При непрерывном изменении параметров проводов корни уравнения (12) непрерывно изменяют свои значения, и, следовательно, при достаточно малых параметрах взаимного влияния проводов сохраняется отрицательность вещественной части корней уравнения (12).

4. Решение поставленной задачи получено в предположении, что уравнение (12) при любом целом k обладает только простыми корнями. Если же, например, $\lambda\binom{1}{k}$ является двойным корнем этого уравнения при некотором k, то оказывается, что сумму соответствующих членов ряда (11) с коэффициентами $c\binom{1}{k}$ и $c\binom{2}{k}$ надо заменить суммой выражений

$$c\binom{1}{k}\mathrm{a}\binom{1}{k}e^{\lambda\binom{1}{k}t}\sin\frac{k\pi x}{l}$$

и

$$c\binom{2}{k}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\mathrm{a}\binom{1}{k}e^{\lambda\binom{1}{k}t}\right]\sin\frac{k\pi x}{l} = c\binom{2}{k}\left[\frac{\partial\,\mathrm{a}\binom{1}{k}}{\partial\lambda} + \mathrm{a}\binom{1}{k}t\right]e^{\lambda\binom{1}{k}t}\sin\frac{k\pi x}{l}.$$

Последнее выражение имеет следующее физическое значение. Колебательный процесс с комплексной частотой $\lambda\binom{1}{k}$, обладающей отрицательной вещественной частью, может иметь возрастающую амплитуду, которая после достижения некоторого максимального значения постепенно убывает до нуля. Это явление имеет характер резонанса.

Для нахождения резонансных частот надо составить дискриминант уравнения (17), приравняв который нулю, получаем уравнение с неизвестным $\frac{k^2\pi^2}{l^2}$. Беря положительные корни этого уравнения, получаем для каждого значения k соответствующую длину l системы проводов, при которой возможно резонансное явление.

Латвийский государственный университет
Рига

Поступило
21 IX 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] П. И. Кузнецов, Прикладн. матем. и мех., 12, в. 2, 141 (1948). [2] Н. А. Бразма, Изв. АН Латв ССР, № 5, 125 (1949).