Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXIX, № 3

МАТЕМАТИКА

Б. В. ШАБАТ

ТЕОРЕМА И ФОРМУЛА КОШИ ДЛЯ КВАЗИКОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ КЛАССОВ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 27 IX 1949)

1. Линейный класс квазиконформных отображений характеризуется системой дифференциальных уравнений вида

$$L[u, v] = au_x + bu_y - v_y = 0,$$
$$M[u, v] = du_x + cu_y + v_x = 0, \tag{1}$$

где $A = ac - \left(\frac{b+d}{2}\right)^2 > 0$ (условие эллиптичности) и коэффициенты $a, \ldots$ $\ldots, d$ — известные функции x и y. Если коэффициенты (1) обладают частными производными по x и y и для u и v справедлива теорема о перестановке порядка дифференцирования, то (1) сводится к уравнению

$$\Lambda[u] = au_{xx} + (b+d)\,u_{xy} + cu_{yy} + (a_x + d_y)\,u_x + (b_x + c_y)\,u_y = 0, \tag{2}$$

или

$$\mathrm{M}[v] = \frac{a}{B} v_{xx} + \frac{b+d}{B} v_{xy} + \frac{c}{B} v_{yy} + \left\{\left(\frac{a}{B}\right)_x + \left(\frac{b}{B}\right)_y\right\} v_x + \left\{\left(\frac{d}{B}\right)_x + \left(\frac{c}{B}\right)_y\right\} v_y = 0, \tag{3}$$

где $B = ac - bd \geqslant A > 0$.

Всякое внутреннее отображение $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, удовлетворяющее системе (1), в каждой точке $z_0 = x_0 + iy_0$ своей однолистности преобразует некоторый эллипс с центром в z_0 во вполне определенный эллипс с центром в точке $w_0 = f(z_0)$, причем для этих эллипсов отношения больших полуосей к малым p и p_1 и наклоны больших осей к осям абсцисс θ и θ_1 определяются через коэффициенты системы (см. [1]).

Самосопряженность уравнений (2) и (3) выражается условием $b = d$, которое геометрически означает, что главные диаметры эллипсов в плоскости w параллельны координатным осям (θ_1 всюду равно 0 или $\pi/2$)*. Условие того, что уравнение (3) сопряжено (2), выражается равенством $B = 1$, которое геометрически означает параллельность главных диаметров в плоскости w бисектриссам координатных

* Если дополнительно предположить, что эллипсы в плоскости z обращаются в окружности, т. е. считать $b = d = 0$, $a = c$, то мы придем к случаю, рассмотренному в работе Г. Положего [2], где для этого частного случая указаны формулы (12) и (19) настоящей заметки.

углов (θ_1 всюду равно $\pi/4$ или $3\pi/4$). Совпадение этих двух условий ($b=d$, $ac-b^2=1$) приводит к тому, что уравнения (2) и (3) совпадают и самосопряжены, или, геометрически, что эллипсы в плоскости w обращаются в окружности — случай, рассмотренный в работе М. А. Лаврентьева [3]. В последнем случае систему (1) мы будем называть с а м о с о п р я ж е н н о й.

2. Если коэффициенты системы (1) обладают непрерывными частными производными, то для любой четверки функций u, v, u^*, v^*, также обладающих непрерывными частными производными, имеет место формула Грина:

$$\int_C \{u^*v-(bu^*+cv^*)u\}\,dx+\{(au^*+dv^*)u+v^*v\}\,dy=$$

$$=\iint_D \{u^*L[u,v]+v^*M[u,v]+u\tilde{L}[u^*,v^*]+v\tilde{M}[u^*,v^*]\}\,dx\,dy, \qquad (4)$$

где C — граница области D и

$$\tilde{L}[u,v]=(au+dv)_x+(bu+cv)_y, \qquad \tilde{M}[u,v]=v_x-u_y.$$

Пусть $X=X(x,y)$ обладает непрерывными вторыми частными производными и удовлетворяет уравнению

$$\tilde{\Lambda}[X]=\tilde{L}[X_x,X_y]=(aX_x+dX_y)_x+(bX_x+cX_y)_y=0, \qquad (5)$$

сопряженному (2), а функция $Y=Y(x,y)$ связана с X соотношениями

$$\begin{aligned} L^*[X,Y]&=aX_x+dX_y-Y_y=0,\\ M^*[X,Y]&=bX_x+cX_y+Y_x=0 \end{aligned} \qquad (6)$$

(существование такой функции обеспечивает (5)). Если теперь (u,v) удовлетворяет (1), а (X,Y) — системе (6), то формула (4), если положить в ней $u^*=X_x$, $v^*=X_y$, даст

$$\int_C v\,dX+u\,dY=0. \qquad (7)$$

Переход от системы (1) к (6) геометрически означает, что каждый эллипс в плоскости w заменяется симметричным с ним относительно оси абсцисс (см. [1]). Если $b=d$, то (1) совпадает с (6), и тогда симметрия не изменяет эллипсов.

3. Разрешив (1) относительно u_y и u_x, получим

$$\begin{aligned} L_1[u,v]&=-a_1v_x-d_1v_y-u_y=0,\\ M_1[u,v]&=-b_1v_x-c_1v_y+u_x=0, \end{aligned} \qquad (8)$$

где $a_1=a/B, \ldots, d_1=d/B$. Для системы (8) имеет место формула (4), в которой всюду u заменено на v, v на u и коэффициенты $a, \ldots, d$ на $-a_1, \ldots, -b_1$. Поэтому, если X^1 удовлетворяет уравнению

$$\tilde{\Lambda}_1[X^1]=-(a_1X^1_x+b_1X^1_y)_x-(d_1X^1_x+c_1X^1_y)_y=0, \qquad (9)$$

а Y^1 связана с X^1 соотношениями

$$\begin{aligned} L_1^*[X^1, Y^1] &= a_1 X_x^1 + b_1 X_y^1 - Y_y^1 = 0, \\ M_1^*[X^1, Y^1] &= d_1 X_x^1 + c_1 X_y^1 + Y_x^1 = 0 \end{aligned} \tag{10}$$

(существование такой функции обеспечивает (9)), то вместо (7) получим

$$\int_C u\,dX^1 - v\,dY^1 = 0. \tag{11}$$

Переход от системы (1) к (10) геометрически означает, что каждый эллипс в плоскости w заменяется симметричным с ним относительно бисектриссы первого координатного угла. Если $B = 1$, то (1) совпадает с (10), и тогда симметрия не изменяет эллипсов.

4. Введем комплексные переменные $Z = X + iY^1$, $Z^* = X^1 + iY$, тогда (7) и (11) можно объединить одной формулой

$$\int_C u\,dZ^* + iv\,dZ = 0, \tag{12}$$

которая и выражает обобщение классической теоремы Коши.

Для случая самосопряженных систем, когда эллипсы в плоскости w обращаются в окружности, (6) и (10) совпадают, следовательно, можно принять $Z^* = Z$, и формула (12) упростится:

$$\int_C f(z)\,dZ = 0. \tag{13}$$

Этот результат очевиден, ибо здесь отображение $Z = Z(z)$ преобразует эллипсы плоскости z в окружности и, следовательно, сложная функция $f[z(Z)] = F(Z)$ является аналитической ([4]). Для системы Коши — Римана можно принять $Z = z$, и мы получаем классическую теорему Коши.

5. Введем теперь неевклидово расстояние

$$\rho(z, z_0) = \sqrt{c(x - x_0)^2 - (b + d)(x - x_0)(y - y_0) + a(y - y_0)^2}$$

и будем рассматривать фундаментальное решение уравнения (5), имеющее в точке z_0 особенность типа $\ln \rho(z, z_0)$:

$$\Gamma(z, z_0) = \gamma'(z, z_0) \ln \rho(z, z_0) + \gamma''(z, z_0)$$

(γ' и γ'' — непрерывные функции), а также сопряженную с ним функцию

$$H(z, z_0) = \int^z -(b\Gamma_x + c\Gamma_y)\,dx + (a\Gamma_x + d\Gamma_y)\,dy. \tag{14}$$

В силу (5) интеграл (14) не изменяется при непрерывной деформации пути интегрирования, если при этом не задевать точки z_0. При обходе же точки z_0 (один раз против часовой стрелки) функция H получает приращение

$$\lim_{h \to 0} \int_{\rho(z, z_0) = h} -(b\Gamma_x + c\Gamma_y)\,dx + (a\Gamma_x + d\Gamma_y)\,dy = \tag{15}$$

$$= A(z_0)\gamma'(z_0, z_0) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a \sin^2 t - (b + d)\sin t \cos t + c \cos^2 t} = 2\pi\gamma'(z_0, z_0)\sqrt{A(z_0)},$$

которое будет равным 2π, если принять $\gamma'(z_0, z_0) = 1/\sqrt{A(z_0)}$. Таким образом, многозначная функция $H(z, z_0)$ имеет в точке z_0 особенность того же типа, что и $\operatorname{Arc\,tg}\frac{y-y_0}{x-x_0}$.

Применяя формулу (4), в которой положено $u^* = \Gamma_x$, $v^* = \Gamma_y$, а (u, v) — решение (1), к области D с выброшенным эллипсом $\rho(z, z_0) \leqslant h$, получим

$$\int_C v\,d\Gamma + u\,dH = \int_{\rho(z, z_0)=h} v\,d\Gamma + u\,dH. \tag{16}$$

Так как $\lim\limits_{h\to 0}\int\limits_{\rho=h} v\,d\Gamma = 0$ и в силу (15) $\lim\limits_{h\to 0}\int\limits_{\rho=h} u\,dH = 2\pi u(z_0)$, то из (16) в пределе при $h\to 0$ получим

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_C v(z)\,d_z\Gamma(z, z_0) + u(z)\,d_z H(z, z_0). \tag{17}$$

Переходя к системе (8), аналогично построим фундаментальное решение уравнения (9)

$$\Gamma^1(z, z_0) = \gamma_1'(z, z_0)\ln\rho(z, z_0) + \gamma_1''(z, z_0)$$

и многозначную функцию

$$H^1(z, z_0) = \int^z -(d_1\Gamma_x' + c_1\Gamma_y')\,dx + (a_1\Gamma_x' + b_1\Gamma_y')\,dy,$$

приращение которой при обходе будет равным 2π, если принять $\gamma_1'(z_0, z_0) = B(z_0)/\sqrt{A(z_0)}$.

Тогда вместо (17) будем иметь

$$v(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_C v(z)\,d_z H^1(z, z_0) - u(z)\,d_z\Gamma^1(z, z_0). \tag{18}$$

Вводя комплексные функции

$$l(z, z_0) = \Gamma(z, z_0) + iH^1(z, z_0), \qquad l^*(z, z_0) = \Gamma^1(z, z_0) + iH(z, z_0),$$

мы объединим (17) и (18) в одной формуле

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C u(z)\,d_z l^*(z, z_0) + iv(z)\,d_z l(z, z_0), \tag{19}$$

которая обобщает классическую формулу Коши.

Для самосопряженных систем можно принять $l^* = l$, и формула (19) упростится:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\,d_z l(z, z_0). \tag{20}$$

Наконец, для системы Коши — Римана можно положить $l = \ln(z - z_0)$, и мы получим классическую формулу Коши.

Поступило
27 VI 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. Шабат, Матем. сб., 17 (59), 2 (1945). [2] Г. Положий, ДАН, 58, № 7 (1947). [3] М. Лаврентьев, Матем. сб., 42, 4 (1935). [4] Д. Меньшов, Матем. сб., 2 (44), 2 (1937).