Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXVIII, № 5

ГИДРАВЛИКА

Г. Т. ДМИТРИЕВ

ВЫЧИСЛЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК УСТАНОВИВШЕГОСЯ ПЛАВНО ИЗМЕНЯЮЩЕГОСЯ ДВИЖЕНИЯ В ПРИЗМАТИЧЕСКИХ РУСЛАХ

(Представлено академиком Л. С. Лейбензоном 5 VIII 1949)

Для определения характеристик, расположенных на данном решении дифференциальных уравнений неустановившегося плавно изменяющегося движения, имеются два дифференциальных уравнения [1]:

$$dL = \left(v + \sqrt{\frac{g\omega}{\alpha B}}\right) dt,$$
$$dL = \left(v - \sqrt{\frac{g\omega}{\alpha B}}\right) dt, \tag{1}$$

дающие законы распространения фронтов прямой и обратной волны, нарушающих данную волну и, в частности, данное равномерное или неравномерное плавно изменяющееся движение.

Для вычисления характеристик в последнем случае воспользуемся методом И. И. Агроскина [2] из теории установившегося плавно изменяющегося движения. Напишем уравнения (1) в виде

$$dL = \sqrt{\frac{g\omega}{\alpha B}}(1 + \sqrt{\mathrm{Fr}})\, dt,$$
$$dL = \sqrt{\frac{g\omega}{\alpha B}}(1 - \sqrt{\mathrm{Fr}})\, dt, \tag{2}$$

где $\mathrm{Fr} = \frac{\alpha Q^2}{g}\frac{B}{\omega^3}$, Q — расход, ω — площадь живого сечения, B — ширина по линии свободной поверхности, α — коэффициент, учитывающий неравномерность распределения скоростей в поперечном сечении потока.

Рассмотрим отдельно случаи прямого ($i > 0$), обратного ($i < 0$) и нулевого ($i = 0$) уклона дна.

§ 1. Случай $i > 0$.

Исключая из уравнений (2) и уравнения

$$i\, dL = \frac{1 - \mathrm{Fr}}{1 - \frac{\mathrm{Fr}}{\mathrm{Fr}'}} dh \tag{1,1}$$

для плавно изменяющегося движения величину dL, получим:

$$dt = \frac{a}{i}\sqrt{\frac{\alpha B}{g\omega}}\left(1 - \frac{1-\sqrt{\mathrm{Fr}'}}{1-z^n} - \frac{\sqrt{\mathrm{Fr}'}}{1+z^{n/2}}\right)dz,$$

$$dt = \frac{a}{i}\sqrt{\frac{\alpha B}{g\omega}}\left(1 - \frac{1-\sqrt{\mathrm{Fr}'}}{1-z^n} + \frac{\sqrt{\mathrm{Fr}'}}{1+z^{n/2}}\right)dz,$$

где $z = \sqrt[n]{\frac{\mathrm{Fr}'}{\mathrm{Fr}}}$, $a = \frac{dh}{dz}$, $\mathrm{Fr}' = \frac{\alpha Q'^2}{g}\frac{B}{\omega^3}$, Q' — расход, который пропускало бы данное живое сечение в условиях равномерного движения.

Интегрируя, получим для фронта прямой волны:

$$t = \frac{a}{i}\sqrt{\frac{\alpha B}{g\omega}}\{z_2 - z_1 - (1-\sqrt{\mathrm{Fr}'})[\Phi(z_2) - \Phi(z_1)] - \\ - \sqrt{\mathrm{Fr}'}\,[F_1(z_2) - F_1(z_1)]\}, \qquad (1,2)$$

где

$$\Phi(z) = \int\frac{dz}{1-z^n} + C, \quad F_1(z) = \int\frac{dz}{1+z^{n/2}} + C, \quad t = t_2 - t_1,$$

$\sqrt{\frac{\alpha B}{g\omega}}$ и Fr' — постоянные, имеющие средние для интервала значения.

Для фронта обратной волны имеем:

$$t = \frac{a}{i}\sqrt{\frac{\alpha B}{g\omega}}\{z_2 - z_1 - (1-\sqrt{\mathrm{Fr}'})[\Phi(z_2) - \Phi(z_1)] + \\ + \sqrt{\mathrm{Fr}'}\,[F_1(z_2) - F_1(z_1)]\}, \qquad (1,3)$$

где

$$F_1(z) = \int\frac{dz}{1+z^{n/2}} + C.$$

§ 2. Случай $i < 0$.

Исключая из тех же уравнений (2) и уравнения

$$|i|\; dL = \frac{1-\mathrm{Fr}}{-1-\frac{\mathrm{Fr}}{\mathrm{Fr}'}}\,dh \qquad (2,1)$$

величину dL, получим

$$dt = \frac{a}{|i|}\sqrt{\frac{\alpha B}{g\omega}}\left(-1 + \frac{1+\sqrt{\mathrm{Fr}'}}{1+z^n} - \frac{\sqrt{\mathrm{Fr}'}\,(1-z^{n/2})}{1+z^n}\right)dz,$$

$$dt = \frac{a}{|i|}\sqrt{\frac{\alpha B}{g\omega}}\left(-1 + \frac{1+\sqrt{\mathrm{Fr}'}}{1+z^n} - \frac{\sqrt{\mathrm{Fr}'}\,(1+z^{n/2})}{1+z^n}\right)dz.$$

После интегрирования получим для фронта прямой и обратной волны, соответственно:

$$t = \frac{a}{|i|}\sqrt{\frac{\alpha B}{g\omega}}\{-(z_2 - z_1) + (1+\sqrt{\mathrm{Fr}'})[F(z_2) - F(z_1)] - \\ - \sqrt{\mathrm{Fr}'}\,[G(z_2) - G(z_1)]\}, \qquad (2,2)$$

и

$$t = \frac{a}{|i|}\sqrt{\frac{\alpha B}{g\omega}}\{-(z_2 - z_1) + (1+\sqrt{\mathrm{Fr}'})[F(z_2) - F(z_1)] - \\ - \sqrt{\mathrm{Fr}'}\,[G_1(z_2) - G_1(z_1)]\}, \qquad (2,3)$$

где

$$F(z) = \int \frac{dz}{1+z^n} + C, \quad G(z) = \int \frac{1-z^{n/2}}{1+z^n}\,dz + C,$$

$$G_1(z) = \int \frac{1+z^{n/2}}{1+z^n}\,dz + C.$$

§ 3. Случай $i=0$.

Имея в виду, что здесь

$$i'dL = \frac{1-\mathrm{Fr}}{-\dfrac{\mathrm{Fr}}{\mathrm{Fr}'}}\,dh, \tag{3,1}$$

мы тем же путем получим соответственно для прямой и обратной волны:

$$t = -\frac{a}{i'}\sqrt{\frac{\alpha B}{g\omega}}\,\{[f(z_2)-f(z_1)] - \sqrt{\mathrm{Fr}'}\,[f_1(z_2)-f_1(z_1)]\} \tag{3,2}$$

и

$$t = -\frac{a}{i'}\sqrt{\frac{\alpha B}{g\omega}}\,\{[f(z_2)-f(z_1)] + \sqrt{\mathrm{Fr}'}\,[f_1(z_2)-f_1(z_1)]\}, \tag{3,3}$$

где

$$f(z) = \int z^n dz + C, \quad f_1(z) = \int z^{n/2} dz + C,$$

i' — произвольно выбранный положительный уклон.

§ 4. Уравнения §§ 1—3 являются исходными при расчете волн одного направления по методу характеристик С. А. Христиановича и, в силу примененного нами метода И. И. Агроскина, действительны для призматических русел любой формы вплоть до естественных. Показатель степени n выбирается произвольно и, следовательно, при вычислении интегралов $\Phi(z)$, $F(z)$, $F_1(z)$, $f(z)$ и $f_1(z)$ можно пользоваться имеющимися уже таблицами Бахметева при гидравлическом показателе русла $x=n$ ([3]). Что касается интегралов $G(z)$ и $G_1(z)$, то они сводятся, в свою очередь, к интегралам $F(z)$ и $\int \frac{z^{n/2}}{1+z^n}\,dz$.

Последний интеграл, пользуясь произвольным выбором n и взяв $n=2$, можно привести к простому виду: $\frac{1}{2}\ln(1+z^2)$, не требующему сложного табулирования.

Московский гидромелиоративный институт
им. В. Р. Вильямса

Поступило
4 VIII 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. А. Христианович, Сб. Некоторые новые вопросы механики сплошной среды, АН СССР, 1938. [2] И. И. Агроскин и др., Гидравлика, гл. XVII, 1944. [3] И. И. Агроскин, Таблицы для гидравлических расчетов, 1946.