Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXIX, № 4

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Х. М. МУШТАРИ

НЕЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ РАВНОВЕСИЯ ПОГРАНИЧНОЙ ЗОНЫ УПРУГОЙ ОБОЛОЧКИ

(Представлено академиком А. И. Некрасовым 30 IX 1949)

Нелинейные уравнения равновесия (2.4) и (2.5) статьи ([1]) в случае смешанной деформации, состоящей из безмоментной деформации и краевого эффекта, можно заменить приближенными уравнениями

$$\nabla_\pi T_{\bullet}^{\pi\alpha} + F_{\bullet}^{\alpha} = 0, \tag{1}$$

$$c_{\gamma}^{\delta .} \nabla_\delta \nabla_\lambda L_{\bullet}^{\lambda\gamma} + (b_{\pi\lambda} + q_{\pi\lambda}) T_{\bullet}^{\pi\lambda} + F_{\bullet}^{3} = 0, \tag{2}$$

если пренебречь самое большее величинами порядка $\varepsilon h^{-1/2}$ по сравнению с единицей. Здесь и далее все греческие индексы принимают значения 1 и 2, ε — максимальное относительное удлинение, $2h$ — отношение толщины оболочки к наименьшему из других линейных размеров ее, $F_{\bullet}^{\alpha}$ и F^{3} — контравариантные составляющие внешней силы, $a_{\alpha\beta}$ и $b_{\alpha\beta}$ — коэффициенты первой и второй квадратичных форм срединной поверхности. Изменения этих последних $\varepsilon_{\pi\lambda}$ и $q_{\pi\lambda}$ и контравариантные составляющие безразмерного упругого усилия и момента $T_{\bullet}^{\pi\lambda}$ и $L_{\bullet}^{\lambda\gamma}$ определяются, соответственно, по формулам статей ([2], [1]), а именно, пренебрегая величинами порядка h по сравнению с единицей, т. е. допуская погрешность, присущую приближенной теории оболочек, имеем

$$2\varepsilon_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha v_\beta + \nabla_\beta v_\alpha - 2b_{\alpha\beta} w + \nabla_\alpha w \nabla_\beta w, \quad q_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha \nabla_\beta w, \tag{3}$$

$$T_{\bullet}^{\alpha\beta} = 2A^{\alpha\beta\pi\lambda} h \varepsilon_{\pi\lambda}, \quad L_{\bullet}^{\alpha\beta} = \frac{2}{3} h^3 c_{\pi}^{\beta .} A^{\alpha\pi\lambda\delta} q_{\lambda\delta}, \tag{4}$$

где w — составляющая безразмерного перемещения по внешней нормали к срединной поверхности, v_α — ковариантные составляющие перемещения в плоскости, касательной к этой поверхности,

$$A^{\alpha\beta\pi\lambda} = \{\sigma a^{\alpha\beta} a^{\pi\lambda} + (1-\sigma) a^{\alpha\pi} a^{\beta\lambda}\} : (1-\sigma^2), \tag{5}$$

$$c_{12} = -c_{21} = \sqrt{a_{11} a_{22} - a_{12}^2}.$$

Разложим деформацию на безмоментную и на краевой эффект. Обозначения соответствующих величин будем снабжать добавочным индексом *б* или *к*. Таким образом

$$w = w^б + w^к, \quad v_\alpha = v_\alpha^б + v_\alpha^к, \quad \varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta}^б + \varepsilon_{\alpha\beta}^к, \ldots \tag{6}$$

При этом

$$2\varepsilon^{б}_{\alpha\beta} \approx \nabla_\alpha v^{б}_{\beta} + \nabla_\beta v^{б}_{\alpha} - 2b_{\alpha\beta}w^{б}, \quad hq^{б}_{\alpha\beta} \ll \varepsilon, \quad T^{\alpha\beta}_{б} = 2A^{\alpha\beta\pi\lambda}h\varepsilon^{б}_{\pi\lambda},$$

$$\nabla_\pi T^{\pi\lambda}_{б} + F^{\alpha}_{*} = 0, \quad (b_{\pi\lambda} + q^{б}_{\pi\lambda})\,T^{\pi\lambda}_{б} + F^{3}_{*} = 0. \tag{7}$$

Пусть оболочка ограничена одним или двумя контурами $x^1 = \text{const}$, не касающимися асимптотических линий срединной поверхности. Тогда, как известно,

$$w,^{\kappa}_{1} \sim w^{\kappa}h^{-1/2}, \quad w,^{\kappa}_{2} \sim w^{\kappa} \sim \varepsilon, \quad hq^{\kappa}_{11} \sim \varepsilon, \ldots, \tag{8}$$

где запятая перед индексом обозначает частное дифференцирование, символ $\sim$ показывает одинаковость порядка сравниваемых величин. Если $h \sim \sqrt{\varepsilon}$, то так как $a^{\alpha\beta} \sim 1$, $b_{\alpha\beta} \sim 1$, по формулам (2), (3), (4) и (8), пренебрегая h по сравнению с единицей, краевой эффект можно определять по линейной теории. Поэтому мы предполагаем, что $h \sim \varepsilon$.

Ограничимся в дальнейшем рассмотрением обычного в теории краевого эффекта решения, основанного на пренебрежении величинами деформаций по сравнению с их первыми производными по x^1. Таким образом,

$$\varepsilon^{\kappa}_{11} = \nabla_1 v^{\kappa}_{1} - b_{11}w^{\kappa} + \frac{1}{2}(w,^{\kappa}_{1})^2, \quad q^{\kappa}_{11} = w,^{\kappa}_{11}, \tag{9}$$

$$2\varepsilon^{\kappa}_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha v^{\kappa}_{\beta} + \nabla_\beta v^{\kappa}_{\alpha} - 2b_{\alpha\beta}w^{\kappa}, \quad q^{\kappa}_{\alpha\beta} \approx 0 \text{ при } \beta = 2,$$

$$\nabla_\pi T^{\pi\alpha}_{\kappa} = 0, \quad T^{11}_{\kappa} \leqslant T^{22}_{\kappa}h^{1/2}, \quad T^{12}_{\kappa} \sim T^{22}_{\kappa}h^{1/2}, \tag{10}$$

$$c^{1}_{2} \cdot L,^{12}_{11} + b_{22}T^{22}_{\kappa} + T^{11}_{б}w,^{\kappa}_{11} = 0. \tag{11}$$

Если срединная поверхность отнесена к линиям кривизны, то по формулам (4), (5), (8)—(10)

$$\varepsilon^{\kappa}_{11}a^{11} \approx -\sigma\varepsilon^{\kappa}_{22}a^{22}, \quad \varepsilon^{\kappa}_{12} \sim \varepsilon^{\kappa}_{11}h^{1/2}, \quad v^{\kappa}_{1} \sim w^{\kappa}h^{1/2},$$

$$\varepsilon^{\kappa}_{22} \approx -b_{22}w^{\kappa}, \quad T^{22}_{\kappa} \approx -2h(a^{22})^2 b_{22}w^{\kappa},$$

и разрешающее уравнение (11) приводится к виду

$$Dw,^{\kappa}_{1111} - a_{11}T_{1б}w,^{\kappa}_{11} + Bk^2_2 w^{\kappa} = 0 \tag{12}$$

$$\left(D = \frac{2}{3}\frac{Eh^3}{1-\sigma^2}, \quad B = 2Eh, \quad T_{1б} = T^{11}_{б}a_{11}E, \quad k_2 = \frac{1}{R_2}\right).$$

Это уравнение легко интегрируется, так как коэффициенты его с принятой точностью можно считать в пограничной зоне постоянными. При решении задачи по линейной теории выпадает средний член этого уравнения, который того же порядка, что и остальные его члены.

Пример. Рассмотрим цилиндрическую оболочку постоянной толщины δ, радиуса R и длины $2l$, шарнирно опертую своими концевыми сечениями $x = \pm l$ и находящуюся под действием равномерного внутреннего давления p. Физические составляющие упругого усилия и прогиб по безмоментной теории суть

$$T_{1б} = \text{const} = c, \quad T_{2б} = pR, \quad w^{б} = (pR^2 - \sigma Rc) : E\delta. \tag{13}$$

Интегрируя уравнение (12) и удовлетворяя условиям

$$w = w^{б} + w^{\kappa} = 0, \quad w,_{11} \approx w,^{\kappa}_{11} = 0 \text{ при } x = \pm l,$$

а также учитывая, что, если оболочка не очень коротка ($l \gg \sqrt{\delta R}$), взаимным влиянием закрепления концов можно пренебречь, находим

$$w = w^{б}\left\{1 + e^{\alpha(x-l)}\left[\frac{\alpha^2-\beta^2}{2\alpha\beta}\sin\beta(x-l) - \cos\beta(x-l)\right] - \right.$$

$$\left. - e^{-\alpha(x+l)}\left[\frac{\alpha^2-\beta^2}{2\alpha\beta}\sin\beta(x+l) + \cos\beta(x+l)\right]\right\},$$

$$\alpha = \left\{\frac{1}{R\delta_1}\left(1 + \frac{cR}{E\delta\delta_1}\right)\right\}^{1/2}, \quad \beta = \left\{\frac{1}{R\delta_1}\left(1 - \frac{cR}{E\delta\delta_1}\right)\right\}^{1/2}, \quad \delta_1 = \frac{\delta}{\sqrt{3(1-\sigma^2)}}. \tag{14}$$

Но

$$\int_{-l}^{l} T_1^0\,dx = 2lc = \int_{-l}^{l}\frac{E\delta}{1-\sigma^2}\left[\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dx}\right)^2 + \frac{\sigma w}{R}\right]dx$$

и концы оболочки не могут сближаться. Поэтому с принятой точностью

$$c = T_1^0 \approx \frac{E\delta\sigma w_б}{R(1-\sigma^2)} = pR\sigma, \quad w^б = pR^2\frac{1-\sigma^2}{E\delta},$$

$$w,_{11} = w^б\frac{\alpha^2+\beta^2}{2\alpha\beta}\{e^{\alpha(x-l)}\sin\beta(x-l) - e^{-\alpha(x+l)}\sin\beta(x+l)\}. \tag{15}$$

Удлинение от изгиба вблизи края $x = l$ имеет наибольшее значение в точке

$$x = l - \frac{1}{\beta}\operatorname{arc\,tg}\frac{\beta}{\alpha}. \tag{16}$$

Оно равно

$$\varepsilon_{изг} = \left|\frac{\delta}{2}w,_{11}\right|.$$

Удлинение срединной поверхности $\varepsilon_м = -\delta w^k/R$, полное максимальное удлинение $\varepsilon_m = \varepsilon_{изг} + \varepsilon_м$.

Приводим отношение этой величины к соответствующей величине ε_1, вычисленной по линейной теории, при $\sigma = 0{,}3$ для некоторых значений $\lambda = 0{,}424\, w^б/\delta$:

λ	0,25	0,50	1,0	2,0
$\varepsilon_m : \varepsilon_1$	0,91	0,825	0,735	0,66

Отсюда мы видим, что применение линейной теории к определению краевого эффекта в тонкой упругой оболочке может привести к весьма значительной погрешности.

Казанский химико-технологический институт им. С. М. Кирова

Поступило 19 V 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Х. М. Муштари, Прикладн. матем. и мех., 13, в. 2 (1949). [2] Х. М. Муштари, Тр. Казанск. хим.-технолог. ин-та, в. 13 (1949).