Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXIX, № 4

ГИДРАВЛИКА

В. В. ВЕДЕРНИКОВ

О КРИТЕРИИ ПЕРЕХОДА К СВЕРХБУРНОМУ ИЛИ ВОЛНОВОМУ ПОТОКУ

(Представлено академиком А. И. Некрасовым 8 X 1949)

1. В статье Р. Пауэлла „Критерий Ведерникова для сверхбурного потока" ([1]) не везде точно интерпретируется параметр β, входящий в выражение критерия ([2]), для равномерного течения имеющего вид ([2,1]):

$$V = (1+\beta)\, MU / p\,(W-U). \tag{1}$$

Выполненные Пауэллом расчеты критерия (1) далеко не все правильны. Мы считаем нужным остановиться на определении параметра β и значений критерия.

При выводе формулы критерия из уравнений неустановившегося движения гидравлический уклон можно ([2]) вычислять по формуле Шези

$$I = U^2 / C^2 R. \tag{2}$$

Тогда для турбулентного течения в руслах с не вполне шероховатыми стенками коэффициент Шези C является функцией числа Рейнольдса, или для таких русел гидравлический уклон можно представлять в виде степенной зависимости:

$$I = AU^p / R^{1+\beta} \tag{3}$$

(причем для русел с вполне шероховатыми стенками $p=2$). Р. Пауэлл считает, что сумма показателей степеней в последней формуле должна всегда равняться $p+1+\beta=3$, или что $p=2-\beta$, и в соответствии с этим, ошибочно утверждает, что для течения в русле с вполне шероховатыми стенками из современных полуэмпирических формул следует, что $\beta=0$, поскольку $p=2$.

2. Как явствует из уравнений (15) и (16) статьи ([3]) и уравнений (3) и (5) статьи ([2]) * (см. также ([4]), величина β, входящая в выражение критерия (1) (а также критерия (6) в статье ([2])), появляется при взятии производной от C^2R по s (т. е. вдоль волны) и имеет значение, отвечающее значению этой производной в точке фронта волны. При этом

$$\frac{\partial (C^2R)}{\partial s} = \frac{\partial (C^2R)}{\partial F}\,\frac{\partial F}{\partial s}, \tag{4}$$

т. е. в расчет входит производная от C^2R по площади живого сечения F. Беря эту производную, получим

$$\frac{\partial (C^2 R)}{\partial F} = C^2\left(1+\frac{2R}{C}\frac{\partial C}{\partial R}\right)\frac{\partial R}{\partial F} = C^2(1+\beta)\,\frac{\partial R}{\partial F}. \tag{5}$$

---

* Опечатки к статье ([2]) даны в ДАН, 55, № 3, стр. 206 (1947).

При этом и было введено обозначение

$$\beta = \frac{2R}{C} \frac{\partial C}{\partial R}. \tag{6}$$

При пользовании же зависимостью (3) вместо $\partial (C^2 R) / \partial F$ будем иметь $\partial (R^{1+\beta}) / A \partial F$, и в скобке будет стоять просто $1 + \beta$. При этом $\partial R / \partial F = M / \chi$ ([3], [4]).

Современные полуэмпирические формулы для русел с вполне шероховатыми стенками имеют вид $C = a \log \frac{R}{k} + b$. Здесь k — эффективная высота выступов шероховатости. Пренебрегая зависимостью b от формы русла (наличие этой зависимости считает вероятным Кьюлеген), находим

$$\beta = a / 1{,}15\, C. \tag{7}$$

3. Для гладких русел, соответственно формуле Ли (отвечающей закону Блазиуса), $I = AU^{1{,}75} / R^{1{,}25}$, имеем $p = 1{,}75$ и $\beta = 0{,}25$. Но эта формула имеет определенный предел применимости. Если для русел с гладкими стенками, соответственно современной практике, брать $p = 2{,}0$, т. е. пользоваться формулой (2), тогда C будет функцией числа Рейнольдса. Мы можем написать

$$\frac{\partial C}{\partial R} = \frac{\partial C}{\partial \mathrm{Re}} \frac{\partial \mathrm{Re}}{\partial R} = \frac{\partial C}{\partial \mathrm{Re}} \left(\frac{4U}{\nu} + \frac{4R}{\nu} \frac{\partial U}{\partial R} \right) = \frac{\mathrm{Re}}{R} \left(1 + \frac{R}{U} \frac{\partial U}{\partial R} \right) \frac{\partial C}{\partial \mathrm{Re}}. \tag{8}$$

Обозначим

$$\beta_0 = \frac{2\mathrm{Re}}{C} \frac{\partial C}{\partial \mathrm{Re}}. \tag{9}$$

Тогда

$$\beta = \frac{2R}{C} \frac{\partial C}{\partial R} = \frac{2\mathrm{Re}}{C} \frac{\partial C}{\partial \mathrm{Re}} \left(1 + \frac{R}{U} \frac{\partial U}{\partial R} \right) = \beta_0 \left(1 + \frac{R}{U} \frac{\partial U}{\partial R} \right). \tag{10}$$

Вдоль волны $\partial U / \partial F = (\omega - U) / F$ и $\partial U / \partial R = \partial U / \partial F \cdot \partial F / \partial R = (\omega - U) / MR$ ([4]).

В точке фронта волны, нарушающей равномерное движение, $\omega = W_0$, $U = U_0$, $M = M_0$ и $R = R_0$ (([4]), стр. 68).

Следовательно,

$$\beta = \beta_0 + \beta_0 \frac{W_0 - U_0}{MU_0}, \tag{11}$$

$$\mathrm{V} = \frac{M (1 + \beta_0) U_0}{2 (W_0 - U_0)} + \frac{\beta_0}{2}. \tag{12}$$

Но так как для оценки характера течения $\mathrm{V} \gtreqless 1$, то вместо (12) можем написать

$$M_0 (1 + \beta_0) U_0 / 2 (W_0 - U_0) \gtreqless 1 - \beta_0 / 2,$$

и критерий для оценки характера течения в руслах с гладкими стенками принимает вид

$$\mathrm{V}_0 = \frac{M (1 + \beta_0) U_0}{(2 - \beta_0)(W_0 - U_0)} \gtreqless 1. \tag{13}$$

4. Результат (13) равносилен результату, получающемуся при замене ([1]) на небольшом участке полуэмпирической формулы коэффициента Шези C формулой $C^2 = A' g (\mathrm{Re})^{\beta_0}$ с помощью формулы (9). Тогда формула Шези принимает вид формулы (3):

$$I = \frac{1}{A' g} \frac{U^{2 - \beta_0} \nu^{\beta_0}}{(4R)^{\beta_0} R} = A \frac{U^{2 - \beta_0}}{R^{1 + \beta_0}} = A \frac{U_0^{\,p}}{R^{1 + \beta_0}}, \tag{14}$$

где $p = 2 - \beta_0$, а β_0 вычисляется по формуле (9). Существенно, что такая замена попутно указывает на то, что в эмпирических формулах Ли, Фримена и др. значение A должно вообще зависеть от вязкости жидкости.

Для русел с гладкими стенками полуэмпирические формулы имеют вид $C = a' \log \frac{\mathrm{Re}}{C} + b'$. Пренебрегая зависимостью b' от формы русла, находим [1] *:

$$\beta_0 = \frac{2\mathrm{Re}}{C} \frac{\partial C}{\partial \mathrm{Re}} = \frac{2a'}{C + a'}. \tag{15}$$

Наши расчеты показали, что опыты Р. Пауэлла 24-2—24-6 и 23-1—23-6 с вполне достаточной для практических расчетов точностью дают значения C, мало отличающиеся от значений $C_{\text{Бл}}$ по формуле Блазиуса. Именно, эти опыты Р. Пауэлла дают **

$$C = 1{,}02\, C_{\text{Бл}} = 1{,}02 \sqrt{8g/0{,}316} \sqrt[8]{\mathrm{Re}}. \tag{18}$$

Пользуясь зависимостью (10), находим значение $\beta_0 = 0{,}25$ и критерия (13):

$$\mathrm{V} = MU / 1{,}4 (W - U). \tag{19}$$

5. Затем следует отметить, что Р. Пауэлл в своей таблице для тех опытов, для которых наш критерий больше единицы, расчет критерия ведет по гидравлическим элементам этих опытов и скорости течения, замеренной в этих опытах. Это может давать некоторую оценку состояния течения. Но в опытах, для которых значение критерия больше единицы, течение было сверхбурное или волновое. По смыслу самого

---

* Очевидно, что на небольшом участке полуэмпирическую формулу (для C) и для русел с гладкими стенками можем заменить зависимостью вида $C^2 = C_0^2 R^{\beta'}$.

Беря производную от $C^2 = C_0^2 R^{\beta'}$ по R, значение β' для такой замены вычисляем по формуле (10), полагая для равномерного движения $(\partial I / \partial R = 0)$ (но не для волны) $\frac{\partial U}{\partial R} = \frac{\partial C \sqrt{RI}}{\partial R} = \sqrt{RI} \frac{\partial C}{\partial R} + \frac{C\sqrt{I}}{2\sqrt{R}} = \frac{U}{C}\frac{\partial C}{\partial R} + \frac{U}{2R}$.

Тогда

$$\beta' = \frac{2R}{C}\frac{\partial C}{\partial R} = 3\,\mathrm{Re} \frac{\partial C / \partial \mathrm{Re}}{1 - \frac{\mathrm{Re}}{C}\frac{\partial C}{\partial \mathrm{Re}}}, \tag{16}$$

и затем для полуэмпирических формул

$$\beta' = 1{,}3\ a'/C. \tag{17}$$

Отсюда при равенстве a и a' следует существенный вывод, что при равных значениях C значение β' при равномерном движении больше в $1{,}3 \cdot 1{,}15 \approx 1{,}5$ раза для русел с гладкими стенками, чем β для русел с шероховатыми стенками. Естественно, что при подстановке значения β' по (17) формула (1) дает тот же численный результат, что и формула (13) при значении β_0 по (15). При равных же значениях R значение β будет больше для русел с шероховатыми стенками. Исследование уравнений статьи [3] показывает, что приведенные здесь формулы для расчета значений β действительны и для неравномерного движения (формулы (5) и (6) в статье [2]) при подстановке в формулы (7), (11) значений W, U, M, C, F и B для данного живого сечения.

Мы здесь не приводим численных значений a, b и a', b', так как между значениями этих величин в опытах Зегжда и в опытах Пауэлла получились существенные расхождения, требующие экспериментальной проверки этих значений.

** Возможность появления поправочного множителя для прямоугольных русел опытов Пауэлла обусловливается тем, что переход от круглых труб к таким руслам заменой в числе Рейнольдса диаметра трубы четырьмя гидравлическими радиусами недостаточно отражает влияние формы русла.

вывода критерия он дает оценку возможности неволнового течения и вывод базируется на уравнениях и законе сопротивления неволнового течения. Поэтому при расчетах следовало в формулу критерия подставлять при наблюдавшихся гидравлических элементах скорость течения, которая была бы при возможности неволнового течения и которая может быть рассчитана по формулам неволнового течения. В табл. 1 приводим значения нашего критерия для опытов 23-1—23-3 (при наивысших значениях числа Фруда, для доволнового течения) и опытов 8-12—8-17 (при наименьших значениях числа Фруда для волнового течения) по расчетам Пауэлла и по нашим — по формуле (19) с учетом сказанного выше. Для определения скорости неволнового течения в опытах 8-12—8-17 пользуемся формулой (18).

Таблица 1

Неволновое течение			Волновое течение			
№ опыта	Fr	V	№ опыта	Fr (в опыте)	По Пауэллу V	Исправленное V
23-1	1,69	0,90	8-12	2,49	1,09	1,41 *
23-2	1,67	0,83	8-13	2,60	1,10	1,32
23-3	1,61	0,71	8-14	2,62	1,09	1,28
			8-15	2,54	1,05	1,25
			8-16	2,58	1,04	1,26
			8-17	2,59	1,02	1,23

* Надо заметить, что задача может быть поставлена и так: найти гидравлические элементы русла при возможности неволнового течения для данного в опыте расхода. Тогда имела бы место не только иная скорость течения, но и иная глубина наполнения данного русла. В статье (2), производя расчет такого неволнового течения для опыта 8-12, мы получили для него $V \approx 1{,}26$.

6. Р. Пауэлл учет неравномерности распределения скоростей производит путем введения коэффициента α так, как это имело место в статье (3), которая в этом способе учета базировалась на книге (6). Однако последний (6) способ учета неравномерности распределения скоростей введением в уравнения Сен-Венана вместо множителя $1/g$ множителя α/g вызывает естественные возражения, поскольку перед членами $U\,\partial U/\partial s$ и $\partial U/\partial t$ не могут быть одинаковые множители для корректива неравномерности распределения скоростей по живому сечению. Поэтому в последующих работах (2,4) мы исходили из уравнений неустановившегося движения в том виде, как они были даны Сен-Венаном.

Практически, учет неравномерности распределения скоростей, не давая существенной поправки, выходит за пределы точности расчетов. Можно здесь лишь отметить, что учет этой неравномерности (по Буссинеску) приводит не к увеличению численного значения критерия (1), как это имело место в расчетах Пауэлла, а к его уменьшению.

Всесоюзный заочный энергетический институт
Москва

Поступило
18 IV 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ralph W. Powell, Trans. Am. Geoph. Union, 29, No. 6, December (1948). [2] В. В. Ведерников, ДАН, 52, № 4 (1946). [3] В. В. Ведерников, ДАН, 48, № 3 (1945). [4] В. В. Ведерников, Волны попусков реальной жидкости. Статья в сборн. Неустановившееся движение водного потока в открытом русле, В. В. Ведерников, Н. В. Мастицкий, М. В. Потапов, АН СССР, 1947. [5] А. А. Сабанеев, Изв. Всесоюзн. н.-и. ин-та гидротехники им. Б. Е. Веденеева, 34 (1947). [6] С. А. Христианович, С. Г. Михлин и Б. Б. Девисон, Новые вопросы механики сплошной среды, АН СССР, 1938, стр. 21—22.