Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXVIII, № 5

ГИДРОМЕХАНИКА

Л. И. РУБИНШТЕЙН

ОБ ОДНОЙ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 15 VIII 1949)

В настоящей работе рассматривается краевая задача:

$$\Delta\Delta\psi = \alpha\frac{\partial v}{\partial z}, \quad \Delta v = -\alpha\frac{\partial\psi}{\partial z}, \quad 0 < x < a, \quad 0 < z < c, \quad \alpha = \text{const} > 0;$$

$$\psi = v = \frac{d\psi}{dn} = 0 \quad \text{при } x = 0,\ x = a,\ z = c; \tag{1}$$

$$\psi = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = B = \text{const}, \quad \Delta\psi = -A = \text{const} \quad \text{при } z = 0.$$

К этой краевой задаче сводятся уравнения установившегося движения вязкой несжимаемой жидкости в области $0 < x < a$, $-\infty < y < \infty$, $\zeta(x, y) < z < c$ в поле силы тяжести под воздействием заданного постоянного тангенциального напряжения на свободной поверхности $z = \zeta(x, y)$ и силы Кориолиса в предположении: 1) малости движения, позволяющего в уравнениях Навье — Стокса пренебречь всеми квадратными членами и, считая свободную поверхность $z = \zeta(x, y)$ мало отличающейся от плоскости $z = 0$, отнести все краевые условия с неизвестной поверхности $z = \zeta$ на плоскость $z = 0$, и 2) независимости всех элементов движения от ординаты y. Кроме того, из соображений малости в выражении компонентов силы Кориолиса отброшены все величины, содержащие горизонтальные составляющие угловой скорости вращения земли.

Эта задача (без учета сил Кориолиса) рассматривалась ранее Arakawa (1) и в трехмерном случае ($0 < y < b$) Л. С. Лейбензоном (2). Эти авторы искали решение в виде рядов Фурье. Такой метод позволял только удовлетворить условию равенства нулю нормальной слагающей скорости на границах $x = 0$, $x = a$, но не давал возможности задать значения тангенциальной слагающей скорости на этих границах. Следовательно, в цитированных работах были найдены только частные интегралы линеаризированных уравнений Навье — Стокса, но не было дано однозначно определенное решение краевой задачи.

Мы развиваем здесь метод точного решения задачи (1). Он сводится к разложению решения в неортогональные ряды, коэффициенты которых определяются из вполне регулярной счетной системы линейных уравнений методом последовательных приближений.

Пусть $g(x; z; \xi; \zeta)$ и $G(x; z; \xi; \zeta)$ — функции Грина уравнения Лапласа в области $0 < x < a$, $0 < z < c$, отвечающие краевым условиям:

$$g = 0 \text{ при } x = 0,\ x = a,\ z = c; \quad \frac{\partial g}{\partial z} = 0 \text{ при } z = 0;$$

$$G = 0 \text{ при } x = 0,\ x = a,\ z = 0; \quad \frac{\partial G}{\partial z} = 0 \text{ при } z = c. \tag{2}$$

Как известно,

$$g = \frac{4}{\pi^2 ac} \sum_{m,\ n=0}^{\infty} \mu_{mn} \sin \mu_m x \sin \mu_m \xi \cos \lambda_n z \cos \lambda_n \zeta,$$

$$G = \frac{4}{\pi^2 ac} \sum_{m,\ n=0}^{\infty} \mu_{mn} \sin \mu_m x \sin \mu_m \xi \sin \lambda_n z \sin \lambda_n \zeta, \tag{2'}$$

где

$$\mu_m = \frac{m\pi}{a}, \quad \lambda_n = \frac{2n+1}{c}\pi, \quad \mu_{mn}^{-1} = \mu_m^2 + \lambda_n^2. \tag{2''}$$

При таком выборе g и G функции v и ψ должны удовлетворять уравнениям

$$v = B \int_0^a g \Big|_{\zeta=0} d\xi + \alpha \int_0^a d\xi \int_0^c g \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} d\zeta,$$

$$\psi = - \int_0^a d\xi \int_0^c G \Delta\psi \, d\zeta. \tag{3}$$

Ищем $\Delta\psi$ в виде

$$\Delta\psi = -A + \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \operatorname{sh} \lambda_n x + b_n \operatorname{ch} \lambda_n x) \sin \lambda_n z + \sum_{m=0}^{\infty} c_m \operatorname{sh} \mu_m z \sin \mu_m x +$$

$$+ \frac{1}{\pi^2} \sum_{m,\ n=0}^{\infty} a_{mn} \mu_{mn} \sin \mu_m x \sin \lambda_n z. \tag{4}$$

Коэффициенты $a_n, \ldots, a_{mn}$ надлежит выбрать так, чтобы ψ и v, определенные из (3), удовлетворяли условиям

$$\Delta\Delta\psi = \alpha \frac{\partial v}{\partial z}, \tag{5}$$

$$\psi = 0 \text{ при } z = c; \qquad \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \text{ при } x = 0,\ x = a. \tag{5'}$$

Остальные условия задачи удовлетворяются при любых $a_n, \ldots, a_{mn}$ в силу определения (3).

В предположении законности двухкратного почленного дифференцирования ряда (4) можно исключить v из системы (3), (4), (5). Это позволит выразить a_{mn}, а следовательно и ψ через a_n, b_n, c_m. Получим:

$$\psi(x, z) = \sum_{m,\ n=0}^{\infty} \mu_{mn} \left\{ A_{mn} + \left[\frac{a_n I_1 + b_n I_2}{a} + \frac{c_m I_3}{c} \right] B_{mn} \right\} \sin \mu_m x \sin \lambda_n z. \tag{6}$$

Здесь введены обозначения:

$$A_{mn} = -\frac{2}{\pi^2} \frac{2}{2n+1} \frac{1-(-1)^m}{m} \left[A B_{mn} + B \frac{2\alpha}{\pi^4} \mu_{mn}^2 B_{mn}^* \right],$$

$$B_{mn} = 1 - \frac{\alpha^2}{\pi^4} \mu_{mn}^3 B_{mn}^*, \qquad B_{mn}^* = \frac{\lambda_n^2 \mu_{mn}^{-3}}{\pi^2 \left[\mu_{mn}^{-3} + \frac{\alpha^2}{\pi^6} \lambda_n^2 \right]}; \tag{6'}$$

$$I_1 = \int\limits_0^a \operatorname{sh} \lambda_n \zeta \sin \mu_m \zeta \, d\zeta, \quad I_2 = \int\limits_0^a \operatorname{ch} \lambda_n \zeta \sin \mu_m \zeta \, d\zeta,$$

$$I_3 = \int\limits_0^c \operatorname{sh} \mu_m \zeta \sin \lambda_n \zeta \, d\zeta. \tag{6''}$$

Внося (6) в краевые условия (5′) и приравнивая к нулю коэффициенты при $\sin \mu_m x$ в первом из условий (5′) и при $\sin \lambda_n z$ во втором, найдем после элементарных преобразований, что a_n, b_n и c_m связаны соотношениями:

$$\alpha_n = \frac{S_5(n)}{S_2(n) - S_1(n)} + \frac{(-1)^n}{c} \sum_{m=0}^{\infty} m\gamma_m \mu_{mn}^2 B_{mn} \frac{(-1)^m}{S_2(n) + (-1)^m S_1(n)},$$

$$\beta_n = -\frac{S_5(n)}{S_2(n) - S_1(n)} + \frac{(-1)^{1+n}}{c} \sum_{m=0}^{\infty} m\gamma_m \mu_{mn}^2 B_{mn} \frac{1}{S_2(n) - (-1)^m S_1(n)}, \tag{7¹}$$

$$\gamma_m = \frac{S_4(m)}{S_3(m)} + \frac{cm}{a^2 S_3(m)} \sum_{n=0}^{\infty} \mu_{mn}^2 S_5(n) B_{mn} \frac{1-(-1)^m}{S_2(n) - S_1(n)} +$$

$$+ \frac{c_m}{a^2 S_3(m)} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^n k}{c} \mu_{mn}^2 \mu_{kn}^2 B_{mn} B_{kn} \frac{1+(-1)^{k+m}}{S_2(n) + (-1)^m S_1(n)} \gamma_k \equiv$$

$$\equiv F_m + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} K_{mnk} \gamma_k. \tag{7²}$$

Здесь введены обозначения:

$$\alpha_n = a_n \operatorname{sh} \lambda_n a + b_n \operatorname{ch} \lambda_n a, \quad \beta_n = b_n \operatorname{ch} \lambda_n a, \quad \gamma_m = \frac{m}{a} c_m \operatorname{ch} \mu_m c, \tag{8¹}$$

$$S_1(n) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m^2}{a^2} B_{mn} \mu_{mn}^2 (-1)^m, \quad S_2(n) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m^2}{a^2} B_{mn} \mu_{mn}^2,$$

$$S_3(m) = \sum_{n=0}^{\infty} B_{mn} \mu_{mn}^2, \quad S_4(m) = -c\pi \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n A_{mn} \mu_{mn}, \tag{8²}$$

$$S_5(n) = a\pi \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} m}{a} A_{mn} \mu_{mn}.$$

Таким образом задача сведена к решению счетной системы линейных уравнений (7²). Перейдем от нее к системе

$$x_m = \frac{F_m}{\ln(m+p)} + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} K_{mnk} \frac{\ln(k+p)}{\ln(m+p)} x_k, \tag{9}$$

положив

$$\gamma_m = x_m \ln(m+p). \tag{9'}$$

Нетрудно показать, что система (9) при подходящим образом выбранном p (например, $p = 3$) вполне регулярна, т. е. что свободные ее члены равномерно ограничены и коэффициенты удовлетворяют неравенству

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left|\sum_{n=0}^{\infty} K_{mnk}\frac{\ln(k+p)}{\ln(m+p)}\right|\leqslant\rho<1. \tag{10}$$

Но отсюда следует, как известно, существование и единственность решения системы (9), причем оно может быть построено методом последовательных приближений при произвольном выборе нулевых приближений.

Вместе с тем доказывается существование и единственность решения системы (7^2), причем устанавливается порядок роста γ_m не больший, чем $\ln(m+p)$. Пользуясь этим, найдем, что ряды (7^1), определяющие α_n и β_n, равномерно сходятся. Более того, легко видеть теперь, что ряд (4) можно дважды дифференцировать почленно, а это оправдывает все операции почленных дифференцирований, которые привели к системе (7^2).

В заключение заметим, что без всякого изменения метода можно отказаться от постоянства величин A и B, но потребовать их достаточной гладкости.

Поступило
1 VIII 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Arakawa, Mem. Imp. Marine Obs., 6, No. 1 (1935). [2] Л. С. Лейбензон, Изв. АН СССР, сер. геогр. и геофиз., № 5, 621 (1940).