Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXIX, № 4

МЕХАНИКА

А. М. ФАЙНЗИЛЬБЕР

ТЕПЛОВЫЕ ПОТЕРИ ЭНЕРГИИ В ПОТОКАХ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ БОЛЬШИХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА

(Представлено академиком Л. С. Лейбензоном 10 X 1949)

1. Определение тепловых потерь энергии позволяет установить закон распределения температур в жидкости, что имеет существенное значение, особенно для целей теории теплового моделирования. Отечественная теория теплового моделирования, основанная акад. М. В. Кирпичевым, как известно, является наиболее эффективным методом решения как теоретических, так и экспериментальных проблем теплотехники.

Определение потерь энергии при обтекании тела произвольной формы плоско-параллельным потоком вязкой жидкости важно также и как эффективный метод решения уравнений вязкой жидкости при больших числах Рейнольдса (уравнений пограничного слоя).

Система дифференциальных уравнений, изображающих движение вязкой жидкости, при больших числах Рейнольдса имеет вид

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\bar{u}\frac{d\bar{u}}{dx}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \tag{1}$$

$$u=\partial\Psi/\partial y, \qquad v=-\partial\Psi/\partial x. \tag{2}$$

Здесь Ψ — функция тока, u и v — компоненты скорости, ρ — плотность, μ — динамический коэффициент вязкости, $\nu=\mu/\rho$ — кинематический коэффициент вязкости, $\bar{u}$ — значение u для идеального потока.

Граничные условия системы (1) — (2) суть:

$$\text{при}\quad y=0\quad u=v=0;\qquad \text{при}\ y=\bar{y}\quad u=\bar{u}(x),\ \partial u/\partial y=0 \tag{3}$$

(здесь $\bar{y}$ соответствует границе слоя, т. е. идеальному потоку).

2. Вывод уравнения для потери энергии. Пусть x_m — абсцисса некоторой характерной точки m (в качестве ее, например, можно брать точку минимума давления). Перейдем к безразмерным независимым переменным

$$y_1=\frac{\bar{u}(x)-u(x,y)}{\bar{u}(x)},\quad x_1=\frac{x}{x_m}. \tag{4}$$

В качестве зависимой безразмерной переменной введем относительную потерю энергии

$$E_1=\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\Big/\frac{\rho\bar{u}_k^2}{2}; \tag{5}$$

k — некоторая другая характерная точка (точки k и m могут совпадать или иначе, для удобства, можно полагать также $x_m=1$; $\bar{u}_k=1$).

Преобразовывая систему (1) — (2) к новым переменным, получаем уравнение

$$E_1 \frac{\partial^2 E_1}{\partial y_1^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial E_1}{\partial y_1}\right)^2 + a' y_1 (2 - y_1) \frac{\partial E_1}{\partial y_1} - 3a(1 - y_1) \frac{\partial E_1}{\partial x_1} = 0, \tag{6}$$

где $a(x_1) = 2\bar{u}^3 / 3\bar{u}_k^2 x_m$ — заданная функция x_1.

Граничные условия уравнения (6) суть

$$\text{при } \; y_1 = 0 \quad E_1 = 0; \qquad \text{при } \; y_1 = 1 \quad \partial E_1/\partial y_1 = 2a'. \tag{7}$$

Отметим, что введенные нами переменные обладают свойством универсальности, т. е. система (6) — (7) равно применима как к конечному, так и к асимптотическому слою.

3. Будем искать решение системы (6) — (7) в виде ряда

$$E_1 = \sum_{i=2}^{\infty} B_i(x) y_1^i. \tag{8}$$

Для определения $B_2(x_1)$ получаем уравнение

$$4a' B_2 - 3a \, dB_2/dx_1 = 0,$$

интегрируя которое находим, в силу (7),

$$B_2(x_1) = c_2 \bar{u}^4. \tag{9}$$

Для определения произвольных постоянных заметим, что в частном случае конфузора $(u = -1/x_1)$ система (6) — (7) сводится к квадратуре

$$E_1 = \frac{4}{x_1^4}\left(y_1^2 - \frac{1}{3} y_1^3\right). \tag{10}$$

Сопоставляя (9) и (10), получаем $c_2 = 4$, т. е.

$$B_2(x_1) = 4\bar{u}^4. \tag{9'}$$

Для определения $B_3(x_1)$ получаем уравнение

$$\frac{dB_3}{dx_1} - \left(\frac{6\bar{u}'}{\bar{u}} + 4\bar{u}\right) B_3 = 8\bar{u}^3 \bar{u}',$$

интегрируя которое находим

$$B_3(x_1) = \left(8 \int \frac{\bar{u}'}{\bar{u}^3} e^{-4\int \bar{u}\, dx_1} dx_1 + c_3\right) \bar{u}^6 e^{4\int \bar{u}\, dx_1}.$$

Сопоставление с частным решением (10) дает $c_3 = 0$, т. е. имеем

$$B_3(x_1) = 8\bar{u}^6 e^{4\int \bar{u}\, dx_1} \int \frac{\bar{u}'}{\bar{u}^3} e^{-4\int \bar{u}\, dx_1} dx_1. \tag{11}$$

Для $B_4(x_1)$ получаем уравнение

$$\frac{dB_4}{dx_1} - \left(\frac{8\bar{u}'}{\bar{u}} + 12\bar{u}\right) B_4 = Q(x_1),$$

где $Q(x_1) = \dfrac{dB_3}{dx_1} - \dfrac{a'}{a} B_3 + \dfrac{B_3^2}{2a}$.

Интегрируя уравнение и сопоставляя с (10), находим

$$B_4(x_1) = \bar{u}^8 e^{12\int \bar{u}\, dx_1} \int \frac{Q(x_1)}{\bar{u}^8} e^{-12\int \bar{u}\, dx_1} dx_1 \tag{12}$$

и т. д.

Таким образом мы можем последовательно определить все коэффициенты разложения. Условие отрыва определяется уравнением

$$\sum B_i(x_1) = 0. \tag{13}$$

4. Распределение скоростей. После того как найдено E_1, нетрудно установить связь между новой переменной y_1 и старыми переменными x и y, т. е. найти распределение скоростей. Имеем

$$E_1 = \frac{2\mu\,(\partial u/\partial y)^2}{\rho \bar{u}_k^2} = \frac{2\mu \bar{u}^2}{\rho \bar{u}_k^2}\left(\frac{\partial y_1}{\partial y}\right)^2 = \sum_{i=2}^{\infty} B_i(x)\, y_1^i.$$

Отсюда

$$\frac{\partial y_1}{\partial y} = \sqrt{\frac{1}{2\nu}}\,\frac{\bar{u}_k}{\bar{u}}\sqrt{B_2(x_1)}\, y_1 \left[1 + \frac{B_3(x_1)}{2B_2(x_1)}\, y_1 + \cdots\right].$$

Производя интеграцию, получаем

$$\sqrt{\frac{1}{2\nu}}\,\frac{\bar{u}_k}{\bar{u}}\sqrt{B_2(x_1)}\, y = C(x_1) + \ln y_1 - \frac{B_3(x_1)}{2B_2(x_1)}\, y_1 + \frac{B_4(x_1)}{2B_2(x_1)}\, y_1^2 + \cdots$$

и, подставляя значения коэффициентов по (9′) и (11), находим

$$\sqrt{\frac{2}{\nu}}\,\bar{u}_k \bar{u}\, y = C(x_1) + \ln y_1 - \bar{u}^2 e^{4\int \bar{u}\, dx_1} \int \frac{\bar{u}'}{\bar{u}^3}\, e^{-4\int \bar{u}\, dx_1}\, dx_1 \cdot y_1 + \cdots \tag{14}$$

Функция $C(x_1)$ определяется граничным условием: при $y = 0$ $y_1 = 1$. Сопоставление формул (14) и (4) дает распределение скоростей.

5. Распределение температур. Уравнение для распределения температур в наших переменных записывается

$$E_1 \frac{\partial^2 T_1}{\partial y_1^2} + \left[\frac{1-\Pr}{2}\frac{\partial E_1}{\partial y_1} + \Pr a'(1 + y_1^2)\right]\frac{\partial T_1}{\partial y_1} - 3\Pr a y_1 \frac{\partial T_1}{\partial x_1} + \Pr \frac{\bar{u}^2}{cT} E_1 = 0; \tag{15}$$

здесь $T_1 = T/T_0$ — безразмерная температура.

Граничные условия уравнения (15) суть:

$$\text{при } y_1 = 0 \quad T_1 = 1; \qquad \text{при } y_1 = 1 \quad T_1 = \bar{T}/T_0. \tag{16}$$

Не приводя здесь результатов решения системы (15) — (16) в общем случае, приведем результаты для наиболее важного класса случаев $\bar{u} = (\alpha x_1 + \beta)^n$ (степенное распределение скоростей). В этом случае E_1 выражается в форме Фурье

$$E_1 = A_n(y_1)\, B_n(x_1), \quad \text{где } B_n(x_1) = \frac{2\alpha}{\bar{u}_m^2 x_m}\,(\alpha x_1 + \beta)^{3n-1}.$$

$A_n(y_1)$ определяется дифференциальным уравнением

$$A_n A_n'' - {}^1/_2\, A_n'^2 - n(1 - y_1^2)\, A_n' - (3n-1)\, y_1 A_n = 0 \tag{17}$$

при граничных условиях

$$A_n(1) = 0, \; A_n'(0) = -2n. \tag{18}$$

Для температуры T_1 получаем уравнение

$$A_n(y_1)\frac{\partial^2 T_1}{\partial y_1^2} + \left[\frac{1-\Pr}{2} A_n' + \Pr n(1 + y_1^2)\right]\frac{\partial T_1}{\partial y_1} - \Pr\left(x_1 + \frac{\beta}{\alpha}\right) y_1 \frac{\partial T_1}{\partial x_1} = 0. \tag{19}$$

Решение системы (19), (16) можно искать в форме

$$T_1 = T_1(y_1).$$

Интеграция дает

$$\frac{T-T_0}{T-T_0} = \frac{\int\limits_0^{y_1} A_n^{\frac{\Pr-1}{2}}(y_1)\exp\left[n\Pr\int\frac{1+y_1^2}{A_n(y_1)}dy_1\right]dy_1}{\int\limits_0^{1} A_n^{\frac{\Pr-1}{2}}(y_1)\exp\left[n\Pr\int\frac{1+y_1^2}{A_n(y_1)}dy_1\right]dy_1}. \quad (20)$$

Функция $A_n(y_1)$ определяется из системы (17), (18) в виде ряда коэффициенты которого α_m определяются при помощи формул

$$\alpha_1 = -2n; \quad \alpha_2 = 0; \quad \alpha_3 = \frac{3n-1}{6}; \quad \alpha_4 = \frac{n(n+1)}{24\alpha_0};$$

$$\alpha_5 = \frac{n^2(n+1)}{24\,\alpha_0^2}; \quad \alpha_6 = \frac{n+1}{48\,\alpha_0}\left(\frac{7n^2}{3\alpha_0^2} - \frac{3n-1}{5}\right);$$

$$\alpha_7 = \frac{n(n+1)}{336\alpha_0^2}\left(\frac{21\,n^2}{\alpha_0^2} - \frac{101\,n-27}{15}\right)$$

и т. д.

В случае $n = -1$ (конфузор) получаем

$$A_{-1}(y_1) = -{}^4/_3 + 2y_1 - {}^2/_3\,y_1^3. \quad (21)$$

В случае $n = 0$ (пластина) получаем

$$A_0(y_1) = 0{,}110 - 0{,}167\,y_1^3 + 0{,}038\,y_1^6 + 0{,}009\,y_1^9 + \cdots \quad (22)$$

Для $n = 1$ (полигональное распределение скоростей) получаем

$$A_1(y_1) = 1{,}520 - 2{,}000\,y_1 + 0{,}333\,y_1^3 + 0{,}055\,y_1^4 + 0{,}055\,y_1^5 + 0{,}017\,y_1^6 + \cdots \quad (23)$$

Для температуры, согласно формуле (20), в конкретных случаях имеем:

а) для конфузора

$$\frac{T-T_0}{T-T_0} = \frac{\Phi(y_1)}{\Phi(1)}, \quad (24)$$

где

$$\Phi(y_1) = \int\limits_0^{y_1}\left(\frac{-4+6y_1-2y_1^3}{3}\right)^{\frac{\Pr-1}{2}} \exp\left[3n\Pr\int\frac{1+y_1^2}{-4+6y_1-2y_1^3}dy_1\right];$$

б) для пластины получаем тот же закон, где $\Phi(y_1)$ имеет вид

$$\Phi(y_1) = \int\limits_0^{y_1} A_0^{\frac{\Pr-1}{2}}(y_1)\,dy_1;$$

$A_0(y_1)$ определяется формулой (22).

В случае $\Pr = 1$ $\Phi(y_1) = y_1$, т. е. получаем подобие профилей скоростей и температур.

Поступило
23 VIII 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. В. Кирпичев и М. А. Михеев, Моделирование тепловых устройств, АН СССР, М., 1936. [2] А. М. Файнзильбер, ДАН, 48, № 7 (1945).