Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXIX, № 4

МАТЕМАТИКА

Н. Г. ТУГАНОВ

АФФИННО-БАЗИСНЫЕ ЛИНИИ НА ПОВЕРХНОСТИ

(Представлено академиком Н. Н. Лузиным 4 X 1949)

§ 1. **Определение поверхности в аффинном пространстве.** В работе ([1]) мы вывели уравнение аффинно-базисных линий поверхности в асимптотических параметрах в виде

$$v'' + \frac{F^2 H}{A} v'^3 + v'^2 \frac{\partial}{\partial v} \ln \frac{F}{A^2} + v' \frac{\partial}{\partial u} \ln \frac{F^2}{A} + \frac{A}{F} = 0.$$

Возникает вопрос, при каких условиях уравнение вида

$$v'' + av'^3 + bv'^2 + cv' + \partial = 0, \qquad (*)$$

где u, v — асимптотические параметры поверхности, изображает аффинно-базисные линии поверхности, или, что то же, прямые бесконечно удаленной плоскости. Для этого необходимо, чтобы коэффициенты a, b, c, ∂ удовлетворяли системе (**) трех дифференциальных уравнений:

$$b_u + c_v + \frac{\partial^2 \ln \partial}{\partial u\, \partial v} = 0,$$

$$2c_{uv} - b_{uu} - 3\partial_{vv} + 3a\partial_u + 6\partial a_u + 2cc_v - cb_u - 3\partial b_v - 3b\partial_v = 0,$$

$$2b_{uv} - c_{vv} + 3\frac{\partial_u}{\partial^2}\partial_{vv} - \frac{6a_u \partial_u}{\partial} - 3a_{uu} + \frac{3b_v \partial_u}{\partial} + 3\frac{b}{\partial^2}\partial_u \partial_v - 2bb_u + \qquad (**)$$

$$+ bc_v - 6a\partial_v - 3\partial a_v + 3ac_u + 3ca_u - 2\frac{c}{\partial^2} c_v \partial_u + \frac{c}{\partial^2} b_u \partial_u - 3\frac{a}{\partial^2}\partial_u^2 = 0.$$

Обратно, если коэффициенты a, b, c, ∂ удовлетворяют системе уравнений (**), то по ним определяется поверхность с точностью до эквиаффинного преобразования ее в пространстве. Коэффициенты F, A, D основных квадратичной и кубичной форм поверхности находятся при этом в квадратурах по формулам:

$$\frac{\partial}{\partial u} \ln F = c + \frac{\partial}{\partial u} \ln \partial, \quad \frac{\partial}{\partial v} \ln F = -b - 2\frac{\partial}{\partial v} \ln \partial, \quad A = F\partial,$$

$$D = -F\left[a + \frac{1}{3\partial}(2c_v - b_u)\right].$$

Отсюда следует, что аффинно-базисные линии поверхности могут служить исходным пунктом для построения аффинной ее теории.

§ 2. **О точечном соответствии между двумя поверхностями с сохранением аффинно-базисных линий.** Рассмотрим вопрос, при каком условии две поверхности могут находиться во взаимно-однозначно точечном соответствии с сохранением аффинно-базисных линий. Будем пользоваться методом внешних форм Картана ([2]).

Уравнение аффинно-базисных линий на первой поверхности можно представить в виде

$$
\begin{gathered}
u(\omega^1 d\omega^2 - \omega^2 d\omega^1) + u^2(\omega^1)^3 + (4ua - 3\zeta)(\omega^1)^2\omega^2 + \\
+ 2(ub - 3\xi)\,\omega^1(\omega^2)^2 - 3\eta(\omega^2)^3 = 0,
\end{gathered}
\tag{1}
$$

где ω^1, ω^2 — формы Пфаффа, определяющие семейства асимптотических линий поверхности; величины a, b, ξ, η, ζ, u — аффинные инварианты поверхности. Величины, относящиеся ко второй поверхности, будем обозначать аналогично тому, как и для первой, снабжая их чертой вверху. По смыслу соответствия

$$
\bar\omega^1 = A\omega^1 + B\omega^2, \quad \bar\omega^2 = C\omega^1 + D\omega^2. \tag{2}
$$

Внешнее дифференцирование уравнений (2) дает:

$$
\begin{gathered}
[dA + (bA - aB)\,\omega^2;\ \omega^1] + [dB + \bar b(AD - BC)\,\omega^1;\ \omega^2] = 0, \\
[dC + (bC - aD)\,\omega^2;\ \omega^1] + [dD - \bar a(AD - BC)\,\omega^1;\ \omega^2] = 0,
\end{gathered}
$$

откуда

$$
\begin{aligned}
dA &= \lambda\omega^1 + (\mu + aB - bA)\,\omega^2, \quad dB = \{\mu + \bar b(BC - AD)\}\,\omega^1 + \nu\omega^2; \\
dC &= \lambda_1\omega^1 + \{\mu_1 + (aD - bC)\}\,\omega^2, \quad dD = \{\mu_1 + \bar a(AD - BC)\}\,\omega^1 + \nu_1\omega^2.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Используя выражения (3), из условия соответствия двух поверхностей получим 4 конечных соотношения для искомых величин:

$$
\begin{gathered}
[\bar u(AD - BC)] : u = [\bar uA(\lambda_1 + 4\bar aAC + 2\bar bC^2 + \bar uA^2) - \\
- C(\bar u\lambda + 3\bar\zeta A^2 + 6\bar\xi AC + 3\bar\eta C^2)] : u^2 = \\
= [\bar uA(2\mu_1 + aD + 5\bar aAD + 5\bar bCD + 3\bar uAB) + \bar uB(\lambda_1 + 7\bar aAC + \bar bC^2) - \\
- \bar uC(2\mu + aB) - 6\bar\zeta ABC - 6\bar\xi BC^2 - 9\bar\eta C^2D - \bar u\lambda D - 3\bar\zeta A^2D - \\
- 12\bar\xi ACD] : (4ua - 3\zeta) = [\bar uA(\nu_1 + 9\bar aBD + 3\bar bD^2 + 3\bar uB^2) + \\
+ \bar uB(2\mu_1 - bC) - \bar u\nu C - 3(\bar\zeta - \bar u\bar a)B^2C - 3(4\bar\xi - \bar u\bar b)BCD - 9\bar\eta CD^2 - \\
- \bar uD(2\mu - bA) - 6\bar\zeta ABD - 6\bar\xi AD^2] : 2(ub - 3\xi) = \\
= [\bar uB(\nu_1 + 4\bar aBD + 2\bar bD^2 + \bar uB^2) - \bar u\nu D - 3\bar\zeta B^2D - 6\bar\xi BD^2 - 3\bar\eta D^3] : 3\eta.
\end{gathered}
\tag{4}
$$

Дифференцируя внешним образом уравнения (3) и используя уравнения аффинной теории поверхностей, получим 12 внешних уравнений второго измерения.

Разрешая конечные соотношения (4) относительно λ_1, μ_1, ν_1, ν, подставим их выражения во внешние уравнения системы. Применяя к этой системе признак совместности ([3]), установим, что система в инволюции и общее решение ее зависит от 12 произвольных функций одного аргумента. Тем самым получает полную определенность высказанное нами ранее ([1]) предположение, что аффинно-базисные линии интерпретируют на поверхности проективные свойства плоскости. Указанное свойство имеет место только в применении к классу поверхностей, зависящему от 12 произвольных функций одного аргумента.

§ 3. Аффинно-базисные линии второго порядка на поверхности. Аффинно-базисной линией второго порядка назовем линию на поверхности, в точках которой асимптотические касательные одного семейства пересекают бесконечно удаленную плоскость по линиям второго порядка. Для вывода уравнения этих линий возьмем уравнение поверхности в виде $z = f(x, y)$, где x, y, z — декартовы прямоугольные координаты точки.

Асимптотические касательные одного семейства вдоль рассматриваемой линии, если их перенести параллельно в одну точку, образуют конус второго порядка. Уравнение этого конуса с вершиной в начале координат выразится

$$c_1 x^2 + c_2 y^2 + c_3 z^2 + 2c_4 xy + 2c_5 yz + 2c_6 zx = 0.$$

Направления асимптотических линий определятся на поверхности через

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{-s \pm \sqrt{s^2 - rt}}{t}.$$

Уравнение аффинно-базисных линий второго порядка на поверхности в конечной форме выразится так:

$$c_1 t^2 + c_2 (-s \pm \sqrt{s^2 - rt})^2 + c_3 [pt + q(-s \pm \sqrt{s^2 - rt})]^2 +$$
$$+ 2c_4 t(-s \pm \sqrt{s^2 - rt}) + 2c_5 (-s \pm \sqrt{s^2 - rt})[p + q(-s \pm \sqrt{s^2 - rt})] +$$
$$+ 2c_6 [p + q(-s \pm \sqrt{s^2 - rt})] = 0.$$

Дифференцируя это соотношение последовательно 5 раз по x и исключая произвольные постоянные c_i, получим обыкновенное дифференциальное уравнение 5-го порядка, изображающее аффинно-базисные линии 2-го порядка. Чтобы вывести инвариантное уравнение аффинно-базисных линий 2-го порядка, применим операцию псевдоскалярного умножения двух векторов. Для конуса 2-го порядка с вершиной в начале координат, образованного асимптотическими касательными, имеем

$$\bar{r}_u * \bar{r}_u = 0.$$

Дифференцируя это соотношение вдоль аффинно-базисной линии 2-го порядка последовательно 5 раз и исключая псевдоскалярные произведения $\bar{r}_u * \bar{r}_u$, $\bar{r}_u * \bar{r}_v$, $\bar{r}_u * \mathfrak{y}$, $\bar{r}_v * \bar{r}_v$, $\bar{r}_v * \mathfrak{y}$, $\mathfrak{y} * \mathfrak{y}$, получим инвариантное уравнение аффинно-базисных линий 2-го порядка в виде

$$\frac{1}{2}\frac{d\Phi}{du} + \frac{1}{3}\Phi\left[\frac{d\ln\omega}{du} + 3v'^2\frac{F^2H}{A} + v'\left(\frac{F_v}{F} - 2\frac{A_v}{A}\right) + \frac{F_u}{F} + \frac{A_u}{A}\right] +$$
$$+ \Omega\omega\left(v'\frac{F^2H}{A} - \frac{A_v}{A}\right) + \omega\left(v'\frac{D_u}{F} - FH\right) = 0,$$

где для сокращения обозначено:

$$\omega = v'' + v'^3\frac{F^2H}{A} + v'^2\frac{\partial}{\partial v}\ln\frac{F}{A^2} + v'\frac{\partial}{\partial u}\ln\frac{F^2}{A} + \frac{A}{F},$$

$$\Omega = \frac{1}{3}\left(\frac{d\ln\omega}{du} + 3v'^2\frac{F^2H}{A} + v'\frac{\partial}{\partial v}\ln\frac{F}{A^5} + 2\frac{\partial}{\partial u}\ln\frac{F^2}{A}\right),$$

$$\Phi = \frac{d\Omega}{du} - \Omega^2 + \Omega\left(v'^2\,\frac{F^2H}{A} + \frac{\partial}{\partial u}\ln\frac{F^2}{A} - 2v'\,\frac{A_v}{A}\right) +$$

$$+ \omega\left(v'\,\frac{F^2H}{A} - \frac{A_v}{A}\right) + v'^2\,\frac{D_u}{F} + v'\left(\frac{AD}{F^2} - FH\right),$$

символ $\frac{d}{du} = \frac{\partial}{\partial u} + v'\frac{\partial}{\partial v}$ означает дифференцирование вдоль кривой семейства.

§ 4. Поверхности с одним семейством асимптотических, состоящим из аффинно-базисных линий 2-го порядка. В качестве приложения уравнения найденных линий определим поверхности, на которых семейство асимптотических состоит из аффинно-базисных линий 2-го порядка. Здесь возникает два класса поверхностей.

1. Класс поверхностей, на которых асимптотические $v = \text{const}$ проектируются своими касательными на бесконечно удаленную плоскость в виде линий 2-го порядка. Этот класс характеризуется системой уравнений

$$H_u = \frac{AD_u}{F^3} - \frac{1}{F}\left(\frac{A_v}{F}\right)_v, \quad H_v = \frac{DA_v}{F^3} - \frac{1}{F}\left(\frac{D_u}{F}\right)_u,$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{F_{uu}}{F} - \frac{F_u}{F}\,\frac{A_u}{A} - \frac{1}{3}\,\frac{A_{uu}}{A} + \frac{5}{9}\left(\frac{A_u}{A}\right)^2 - \frac{A_v}{F}\right] \times$$

$$\times \frac{\partial}{\partial u}\ln\left\{A^{4/3}\left[\frac{F_{uu}}{F} - \frac{F_u}{F}\,\frac{A_u}{A} - \frac{1}{3}\,\frac{A_{uu}}{A} + \frac{5}{9}\left(\frac{A_u}{A}\right)^2 - \frac{A_v}{F}\right]\right\} -$$

$$-\frac{A_v}{F}\left(\frac{F_u}{F} - \frac{1}{3}\,\frac{A_u}{A}\right) = AH$$

и определяется с произволом в 6 функций одного аргумента.

2. Класс поверхностей, на которых асимптотические линии одного семейства проектируются асимптотическими касательными другого семейства на бесконечно удаленную плоскость в виде линии 2-го порядка. Для определения его имеем систему

$$\lambda_v + 2\lambda\left(\frac{1}{3}\,\frac{H_v}{H} - \frac{F_v}{F}\right) - 6\,\frac{D}{H} = 0,$$

$$H_u = \frac{AD_u}{F^3} - \frac{1}{F}\left(\frac{A_v}{F}\right)_v, \quad H_v = \frac{DA_v}{F^3} - \frac{1}{F}\left(\frac{D_u}{F}\right)_u,$$

где $\lambda = \frac{H_{vv}}{H^3} - \frac{4}{3}\left(\frac{H_v}{H^2}\right)^2 - \frac{F_v}{F}\,\frac{H_v}{H^3} + 3\,\frac{D_u}{FH^2}$. Произвол решения 7 функций одного аргумента. Указанный класс является обобщением аффинно-минимальных поверхностей и содержит их как частный случай.

Томский государственный университет
им. В. В. Куйбышева

Поступило
3 X 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. Г. Туганов, ДАН, 57, № 4 (1947). [2] С. П. Фиников, Метод внешних форм Картана, М.—Л., 1948. [3] С. В. Бахвалов, Матем. сборн., 7 (49), 321 (1940).