Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXIX, № 4

МАТЕМАТИКА

ЛЮБОМИР ИЛИЕВ

ПРИЛОЖЕНИЕ ОДНОЙ ТЕОРЕМЫ Г. М. ГОЛУЗИНА ОБ ОДНОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЯХ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 10 X 1949)

В настоящем сообщении рассмотрим класс S функций

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots, \tag{1}$$

регулярных и однолистных в $|z| < 1$. Обозначим через S_k, $k = 1, 2, \ldots$, класс функций

$$f_k(z) = z + a_{k+1} z^{k+1} + a_{2k+1} z^{2k+1} + \cdots, \tag{2}$$

k-симметричных, однолистных и регулярных в $|z| < 1$.

Основой наших исследований послужит одна теорема Г. М. Голузина ([1]) о классе Σ функций

$$F(\zeta) = \zeta + \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{\zeta} + \cdots, \tag{3}$$

регулярных и однолистных в $|\zeta| > 1$, за исключением полюса $\zeta = \infty$.

В первой части сообщения, следуя методу Голузина, установим неравенства

$$\frac{1 - r^2}{(1 + r^k)^{4/k}} \leqslant \left| \frac{f_k(z_1) - f_k(z_2)}{z_1 - z_2} \right| \leqslant \frac{1}{(1 - r^2)(1 - r^k)^{4/k}}, \tag{I}$$

где $0 < r < 1$, $|z_1| \leqslant r$, $|z_2| \leqslant r$, $z_1 \neq z_2$.

Левая часть неравенств (I) точна при $k = 1$ и $k = 2$.

Во второй части сообщения, следуя методу Сеге ([2]), установим одну, до сих пор не доказанную, теорему о начальных конечных суммах нечетных однолистных функций.

Докажем следующую теорему:

Теорема. *Пусть функция*

$$f_2(z) = z + a_3 z^3 + \cdots \tag{4}$$

принадлежит классу S_2.

Тогда все ее конечные суммы

$$\sigma_n^{(2)}(z) = z + a_3 z^3 + \cdots + a_{2n+1} z^{2n+1}, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{5}$$

однолистны в круге $|z| < 1/\sqrt{3}$. Константа $1/\sqrt{3}$ точная.

Г. М. Корицкий ([3]) и С. Такахаши ([4]) установили эту теорему для того случая, когда область, являющаяся образом круга $|z|<1$, при отображении $w=f_2(z)$, $|z|<1$, звездна относительно $w=0$.

К. Джо ([5]) дал доказательство общего случая, которое оказалось ошибочным (см. ([6])). Однако его доказательство для случаев $n=1$ и $n=2$, т. е. для $\sigma_3^{(2)}(z)$ и $\sigma_5^{(2)}(z)$, верно. Тот же автор ([7]) доказал позже теорему для частного случая, когда все коэффициенты $a_{2\nu+1}$ в (4) вещественны. В более поздней работе ([8]) он достиг новых результатов для общего случая, но не доказал теоремы полностью. Мы установим теорему полностью, доказав ее для всякого $n\geqslant 3$.

§ 1. В работе ([1]) Г. М. Голузин установил теорему:

При любых $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ $(n\geqslant 1)$ из области $|\zeta|>1$ для $F(\zeta)\in\Sigma$ в $|\zeta|>1$ имеем

$$\prod_{\nu,\nu'=1}^{n}\left(1-\frac{1}{\zeta_\nu\overline{\zeta}_{\nu'}}\right)\leqslant\left|\prod_{\nu,\nu'<1}^{n}\frac{F(\zeta_\nu)-F(\zeta_{\nu'})}{\zeta_\nu-\zeta_{\nu'}}\right|\leqslant\frac{1}{\prod\limits_{\nu,\nu'=1}^{n}\left(1-\frac{1}{\zeta_\nu\overline{\zeta}_{\nu'}}\right)}, \tag{6}$$

где в среднем произведении при $\nu=\nu'$ под множителем следует понимать $F'(\zeta_\nu)$.

Оценки (6) — точные при $\zeta_\nu=\zeta e^{2\pi i\nu/n}$ $(\nu=1, 2, \ldots, n; |\zeta|>1)$. Нижняя оценка всегда точная при $n=2$.

Если $F(\zeta)\in\Sigma$ и $|\zeta_1|>1$, то, как отмечает Голузин, функция

$$G(\zeta)=\frac{(1-|\zeta_1|^2)F'(\zeta_1)}{F\left(\dfrac{1+\overline{\zeta}_1\zeta}{\overline{\zeta}_1+\zeta}\right)-F(\zeta_1)}=\zeta+\beta_0+\frac{\beta_1}{\zeta}+\cdots \tag{7}$$

тоже принадлежит классу Σ, так что из (6) при $n=1$ получаем в $|\zeta|>1$

$$1-\frac{1}{|\zeta|^2}\leqslant|G'(\zeta)|\leqslant\frac{1}{1-\dfrac{1}{|\zeta|^2}}. \tag{8}$$

Следуя Голузину, положив $\zeta=\dfrac{1-\overline{\zeta}_1\zeta_2}{\zeta_2-\zeta_1}$, $|\zeta_2|>1$, из (8) получаем

$$\frac{(1-|\zeta_1|^2)(1-|\zeta_2|^2)}{|1-\zeta_1\overline{\zeta}_2|^2}\leqslant\left|F'(\zeta_1)F'(\zeta_2)\left(\frac{\zeta_2-\zeta_1}{F(\zeta_1)-F(\zeta_2)}\right)^2\right|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{|1-\zeta_1\overline{\zeta}_2|^2}{(1-|\zeta_1|^2)(1-|\zeta_2|^2)}. \tag{9}$$

Кроме того, из (6) при $n=2$ получаем

$$\left(1-\frac{1}{|\zeta_1|^2}\right)\left(\frac{1}{|\zeta_2|^2}\right)\left|1-\frac{1}{\zeta_1\overline{\zeta}_2}\right|^2\leqslant\left|F'(\zeta_1)F'(\zeta_2)\left(\frac{F(\zeta_1)-F(\zeta_2)}{\zeta_1-\zeta_2}\right)^2\right|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{\left(1-\dfrac{1}{|\zeta_1|^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{|\zeta_2|^2}\right)\left|1-\dfrac{1}{\zeta_1\overline{\zeta}_2}\right|^2}. \tag{10}$$

Из (9) и (10) находим

$$\sqrt{\left(1-\frac{1}{|\zeta_1|^2}\right)\left(1-\frac{1}{|\zeta_2|^2}\right)} \leqslant \left|\frac{F(\zeta_1)-F(\zeta_2)}{\zeta_1-\zeta_2}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{1}{|\zeta_1|^2}\right)\left(1-\frac{1}{|\zeta_2|^2}\right)}}. \qquad (11)$$

Пусть $f(z)\in S$. Тогда $F(\zeta)=\frac{1}{f(1/\zeta)}$ будет принадлежать Σ. Если $0<|z_1|<1$, $0<|z_2|<1$, то, полагая $\zeta_1=1/z_1$, $\zeta_2=1/z_2$, из (11) получаем

$$\left|\frac{f(z_1)\,f(z_2)}{z_1z_2}\right|\sqrt{(1-|z_1|^2)(1-|z_2|^2)} \leqslant \left|\frac{f(z_1)-f(z_2)}{z_1-z_2}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\frac{f(z_1)\,f(z_2)}{z_1z_2}\right| \frac{1}{\sqrt{(1-|z_1|^2)(1-|z_2|)^2}}. \qquad (12)$$

Если $f(z)=f_k(z)\in S_k$, то, согласно теореме искажения, при $|z|=r$ имеем

$$\frac{1}{(1+r^k)^{2/k}} \leqslant \left|\frac{f_k(z)}{z}\right| \leqslant \frac{1}{(1-r^k)^{2/k}}. \qquad (13)$$

Из (12) и (13) при $|z_1|=r_1$, $|z_2|=r_2$ следует

$$\frac{\sqrt{(1-r_1^2)(1-r_2^2)}}{(1+r_1^k)^{2/k}\,(1+r_2^k)^{2/k}} \leqslant \left|\frac{f_k(z_1)-f_k(z_2)}{z_1-z_2}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{(1-r_1^k)^{2/k}(1-r_2^k)^{2/k}\sqrt{(1-r_1^2)(1-r_2^2)}}, \qquad (14)$$

откуда при $r\geqslant r_1$ и $r\geqslant r_2$ получаем (I).

§ 2. Пусть $f_2(z)\in S_2$. При $r=1/\sqrt{3}$ из (I) находим

$$\left|\frac{f_2(z_1)-f_2(z_2)}{z_1-z_2}\right| \geqslant \frac{3}{8}, \qquad (15)$$

где $|z_1|<1/\sqrt{3}$, $|z_2|<1/\sqrt{3}$, $z_1\neq z_2$. Следовательно [2], конечная сумма $\sigma_n^{(2)}(z)$ есть однолистная функция в $|z|<1/\sqrt{3}$, если

$$\left|\sum_{\nu=n+1}^{\infty} a_{2\nu+1}\frac{z_1^{2\nu+1}-z_2^{2\nu+1}}{z_1-z_2}\right| < \frac{3}{8}. \qquad (16)$$

Последнее неравенство будет выполнено, если

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} |a_{2\nu+1}|(2\nu+1)\,r^{2\nu} < \frac{3}{8}, \qquad (17)$$

где $r=1/\sqrt{3}$. Как показал Левин [9], для всякого ν имеем $a_{2\nu+1}<3{,}4$ и, кроме того, $|a_9|<1{,}4$, $|a_{11}|<1{,}7$, так что (17) будет выполнено при $n\geqslant 3$, если

$$9\cdot 1{,}4r^8 + 11\cdot 1{,}7r^{10} + 3{,}4\sum_{\nu=6}^{\infty}(2\nu+1)\,r^{2\nu} < \frac{3}{8}, \qquad (18)$$

т. е. если

$$9\cdot 1{,}4r^8 + 11\cdot 1{,}7r^{10} + 3{,}4r^{12}\,\frac{13\,(1-r^2)+2r^2}{(1-r^2)^2} < \frac{3}{8}\,, \tag{19}$$

или

$$\frac{9\cdot 1{,}4}{3^4} + \frac{11\cdot 1{,}7}{3^5} + \frac{3{,}4\cdot 7}{3^5} < \frac{3}{8}\,.$$

Так как последнее неравенство очевидно, то теорема доказана полностью.

Математический институт при
Софийском университете
София, Болгария

Поступило
17 IX 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Г. М. Голузин, Матем. сборн., 19, (61), 2, 183 (1946). [2] G. Szegö, Math. Ann., 100, 188 (1928). [3] Г. М. Корицкий, Матем. сборн., 36, 91 (1929) [4] S. Takahachi, Proc. Phys.-Math. Soc. Japan, 3 ser., 16, 7 (1934). [5] K. Joh, Proc. Imp. Akad. Tokyo, 11, 407 (1935). [6] Jahrbuch ü. d. Fortschritte d. Math., 61_{II}, 1154 (1935); 63_{II}, 2, 980 (1937). [7] K. Joh, Proc. Phys.-Math. Soc. Japan., 3 ser., 19, 1 (1937). [8] K. Joh, ibid., 3 ser., 21, 191 (1939). [9] V. Levin, Proc. London Math. Soc., 41, 467 (1935).