Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXVIII, № 5

А. ПОВЗНЕР

*МАТЕМАТИКА*

# ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВ ФУНКЦИЙ

*(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 18 VIII 1949)*

Рассмотрим гильбертово пространство $H$ функций $f(m)$, определенных на некотором множестве $\mathfrak{M}$, со скалярным произведением $(f, g)$. Мы будем называть $H$ $g$-пространством, если существует такая функция $\psi(z)$, что для любых $f \subset H$, $z \subset \mathfrak{M}$ выполняется неравенство:

$$|f(z)| \leqslant \psi(z) \| f \| . \tag{1}$$

В дальнейшем $\psi(z)$ будет обозначать $\sup\limits_{\| f \| = 1} |f(z)|$.

Условие (1) эквивалентно утверждению, что при $z$ фиксированном $f(z)$ есть линейный функционал в $H$, откуда следует, по теореме Ф. Рисса, что для каждого $z$ существует в $H$ такой элемент $g_z$, что

$$f(z) = (f, g_z). \tag{2}$$

Из (2) и определения $\psi(z)$ следует

$$\psi(z) = \| g_z \| = \sqrt{(g_z, g_z)} = g_z(z). \tag{3}$$

Обозначим $g_z(v)$ через $g(v, z)$. Функцию $g(v, z)$ будем называть $g$-функцией пространства $H$.

Теорема 1. *$g(v, z)$ эрмитово-позитивное ядро на $\mathfrak{M}$:*

$$g(z, v) = \overline{g(v, z)}; \qquad \sum_{i, k=1}^{n} g(v_i, v_k) \xi_i \overline{\xi}_k \geqslant 0. \tag{4}$$

Действительно, $g(z, v) = g_v(z) = (g_v, g_z)$, откуда

$$\sum_{i, k=1}^{n} g(v_i, v_k) \overline{\xi}_i \xi_k = \left( \sum_{i=1}^{n} g_{v_i} \xi_i, \sum_{i=1}^{n} g_{v_i} \xi_i \right) \geqslant 0.$$

Если $H$ сепарабельно и $u_1(z), u_2(z), \ldots$ — некоторая полная ортонормированная система функций из $H$, то справедлива билинейная формула

$$g(z, v) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(z) \overline{u}_k(v). \tag{5}$$

Доказательство получим, разлагая $g_v$ в ряд по $u_i$:

$$g_v = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k u_k. \tag{6}$$

Так как $\alpha_k = (g_v, u_k) = \overline{(u_k, g_v)} = \overline{u_k(v)}$, то, заменяя в (6) $g_v$ через $g(z, v)$, получим (5).

Лемма 1. *Назовем замкнутой $\psi$-областью совокупность точек $z \subset \mathfrak{M}$, удовлетворяющих неравенству $\psi(z) \leqslant C$, где $C$ — некоторая константа.*

*Тогда, если последовательность $f_n(z) \subset H$ стремится к $f(z) \subset H$ в метрике $H$, то $f_n$ стремится к $f$ равномерно в каждой замкнутой $\psi$-области.*

Доказательство следует из (1).

Формула (2) показывает, что каждой точке $v \subset \mathfrak{M}$ можно единственным образом поставить в соответствие элемент $g_v$ пространства $H$. Пользуясь этим отображением, множество $\mathfrak{M}$ можно рассматривать как совокупность $\tilde{\mathfrak{M}} \subset H$ элементов $g_v$, $v \subset \mathfrak{M}$.

Лемма 2. *Линейная оболочка $\mathfrak{M}$ плотна в $H$.*

Последовательность точек $a_1, a_2, \ldots$ будем называть нормальной последовательностью единственности, если $g_{a_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ линейно независимы при любом $n$ и из $f(a_i) = 0$, $i = 1, 2, \ldots$, следует $f = 0$ для $f \subset H$.

Второе требование эквивалентно плотности линейной оболочки последовательности $g_{a_i}$.

Пусть $a_1, a_2, \ldots$ есть нормальная последовательность единственности. Ортогонализуем последовательность $g_{a_1}, g_{a_2}, \ldots$ и пусть $e_1, e_2, \ldots$ — полученная ортонормированная система.

Любой элемент $f \subset H$ представим в виде

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} (f, e_i) e_i. \tag{7}$$

Известные формулы для $e_i$ дают:

$$\begin{gathered} e_i = \frac{1}{\sqrt{A_i A_{i-1}}} \begin{vmatrix} g(a_1, a_1) \ldots\ldots g(a_1, a_i) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ g(a_{i-1}, a_1) \ldots g(a_{i-1}, a_i) \\ g(z, a_1) \quad \ldots \quad g(z, a_i) \end{vmatrix}; \\ (f, e_i) = \frac{1}{\sqrt{A_i A_{i-1}}} \begin{vmatrix} g(a_1, a_1) \ \ldots \ g(a_i, a_1) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ g(a_1, a_{i-1}) \ldots g(a_i, a_{i-1}) \\ f(a_1) \ \ldots\ldots \ f(a_i) \end{vmatrix}, \end{gathered} \tag{8}$$

где $A_0 = 1$, $A_k = A(a_1, \ldots, a_k) = |g(a_i, a_k)|_1^n$ $(k = 1, 2, \ldots)$.

Формулы (7), (8) дают возможность построения $f \subset H$ по ее значениям в нормальной последовательности единственности.

Следующая теорема очевидна.

Теорема 2. *Если $a_1, a_2, \ldots$ есть нормальная последовательность единственности и $\beta_1, \beta_2, \ldots$ — заданная последовательность чисел, то для того, чтобы существовал $f \subset H$ с $f(a_i) = \beta_i$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left|\left(\frac{1}{A_i, A_{i-1}}\begin{vmatrix} g(a_1, a_1) & \ldots & g(a_i, a_1) \\ \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ g(a_1, a_{i-1}) & \ldots & g(a_i, a_{i-1}) \\ \beta_1 & \ldots & \beta_i \end{vmatrix}\right)\right|^2 < \infty. \tag{9}$$

По лемме 2, линейная оболочка множества $\mathfrak{M}$ плотна в $H$. Поэтому линейная оболочка $g_{a_1}, g_{a_2}, \ldots$ тогда и только тогда плотна в $H$, если для любой точки $y \subset \mathfrak{M}$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\min_{d}\left\| g_y - \sum_{s=1}^{n} d_s g_{a_s}\right\|\right) = 0.$$

Используя детерминантные формулы для минимума, получим:

Теорема 3. *Для того чтобы последовательность $a_1, a_2, \ldots$ была нормальной последовательностью единственности, необходимо и достаточно, чтобы $A(a_1, \ldots, a_n) \neq 0$ при любом $n$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{A(y, a_1, \ldots, a_n)}{A(a_1, \ldots, a_n)} = 0$ при любом $y$.*

Мы будем говорить, что $H$ обладает A-свойством, если из того, что $f \neq 0$, $f(a) = 0$ следует существование в $H$ такой функции $f_1(z)$, что $f_1(a) \neq 0$ и $f_1(z)$ обращается в нуль во всех остальных точках, в которых $f(z)$ обращается в нуль. В этом случае условие теоремы достаточно проверить только для любой одной точки $y$, отличной от $a_1, a_2, \ldots$

Рассмотрим следующую экстремальную задачу.

Найти $\min\limits_{f \subset H}(f, f)$ при условии $f(a_i) = \beta_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Переписывая условие в виде $(f, g_{a_i}) = \beta_i$, получим для минимизирующей функции $f$ выражение

$$f = \sum_{k=1}^{n} x_k g(z, a_k), \quad \text{где} \sum_{k=1}^{n} x_k g(a_i, a_k) = \beta_i \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Пусть задано некоторое множество $\mathfrak{M}$ и эрмитово-ненегативное ядро $K(x, y)$ на нем. Рассмотрим совокупность $H'_K$ функций $\lambda(x)$ вида

$$\lambda(x) = \sum_{1}^{n} K(x, y_s)\lambda_s.$$

Определим скалярное произведение элементов $\lambda = \sum\limits_{s=1}^{n} K(x, y_s)\lambda_s$ и $\mu = \sum\limits_{t=1}^{m} K(x, v_t)\mu_t$, положив

$$(\lambda, \mu) = \sum_{t=1}^{m}\sum_{s=1}^{n} K(v_t, y_s)\overline{\mu_t}\lambda_s.$$

Теорема 4. *Совокупность функций из $H'_K$, при вышеуказанном определении скалярного произведения, образует неполное гильбертово пространство. Замыкание $H_K$ пространства $H'_K$ есть $g$-пространство, $g$-функция которого равна $K(x, y)$.*

Предыдущие рассмотрения естественно приводят к следующему общему способу конструкции $g$-пространств.

Пусть $H$ — некоторое гильбертово пространство и $\mathfrak{M}$ — подмножество его элементов, линейная оболочка которого плотна в $H$. Тогда $H$ однозначно отображается на пространство $H_1$ функций на $\mathfrak{M}$, полагая $f \to f(m) = (f, m)$, $f \subset H$, $m$ пробегает $\mathfrak{M}$. Полагая $(f(m), g(m))_1 = (f, g)$, получим, что $H_1$ есть $g$-пространство, изоморфное $H$, с $g$-функцией $g(m, n) = (m, n)$.

Отметим еще следующий факт, показывающий связь $g$-пространств с функциями Грина. Пусть $H$ есть некоторое гильбертово пространство функций $f(s)$ на множестве $S$ и $D$ — самосопряженный оператор в $H$ с $\inf\limits_{\|f\|=1} (Df, f) > 0$. В таком случае, как известно, $D$ имеет обратный в $H$. Введем в области определения $D$ новое скалярное произведение, положив $(f, g)_1 = (Df, g)$, и пусть построенное в новой метрике гильбертово пространство есть $g$-пространство, а $g(s, t)$ — его $g$-функция. В таком случае справедлива формула

$$D^{-1} f = (f(t), g(t, s)).$$

Научно-исследовательский институт
математики и механики
Харьковского государственного университета

Поступило
6 VII 1949